قاعدة تحويل – ب

تسمى الصيغة التالية أو التحويل التالي تحويل – ب

((λ س . م) ن) $\overset{\leftrightarrow}{_{ب}}$ م [س ↔ ن][١].

ويسمى حد الشكل(**λ س . ح**) سلباً دالياً، ويصور الدالة **س ← ح**؛ فعلى سبيل المثال دالة التطابق **س ← س** تكتب بالصورة (**λ س . س**)

المتغير الزائف **س** يسمى متغيراً مقيداً، ويتفق مع القواعد المعتادة التي تحكم المتغيرات المقيدة في الصيغ الرياضية، على سبيل المثال نطابق التعبيرات التي تختلف فقط في تسمية المتغيرات المقيدة، و حدَّي الصيغة (**ح ح**) يصوران تطبيق الدالة، الفردي يفي بالحساب في حساب لامدا، ويعد إجراءاً لتطبيق الدالة لحججها، ويتألف من البديهية التالية: ((**λ س . ح) ق) = ح = [ق / س]** (**ب**) بيتا

تشير ق هنا إلى قيمة يتم تعريفها باختصار، وقراءة هذه البديهية من اليمين إلى اليسار يصف قاعدة يعاد كتابتها جبرياً لتحويل الحدود، واستبدال الحجة ق محل المتغير **س** داخل هيكل الدالة يسمى باختزال بيتا، ويستخدم السهم للإشارة إليه (وأحياناً أكثر من سهم)[٢].

<u>الاختزال</u>

إن حدود لامدا في حد ذاتها تمثل جزءًا مملاً إذا لم نعرف كيف نحسبها جيداً، وهناك قاعدة واحدة فقط للإحصاء تسمى الاختزال (أو اختزال **ب**)، وتتعلق باستبدال الإجراء الصوري بآخر واقعي، يمكن أن يظهر إذا كان من الممكن تطبيق الحد الدالي على بعض الحدود الأخرى[٣].

<u>اختزال – ب</u>

تعبير إمكانية الاختزال Redex* - اختزال - **ب** يمكن أن يطبق فقط على إمكانية اختزال التعبيرات، وتعبير إمكانية الاختزال يسمى Redex للاختصار، ويعرف كالتالي: **((λ س . م) ن).**

<u>قاعدة الاختزال</u>

يسمى التحويل التالي اختزال– **ب**

---

(1)Fellesien . Mathias , Flat ,Mathew : **Op .Cit**, p. 25.
(2)Van Tonder , Andre '**: Op . Cit** , p. 4.
(3)Jung ,Achim : **Op . Cit** , p. 4.

((λ س . م) ن) ←ب م [س ← ن]

قاعدة سلب – ب

((λ س . م) ن) ←ب م [س ← ن][1].

يتضح أن الاختزال ليس سوى استبدالٍ نصي للإجراء الصوري المتغير في أجزاء الدالة بإجراء واقعي معوضٌ عنه؛ ومن ثم يمكن أن نتوقع الحد بعد عددٍ من الاختزالات للوصول إلى صيغةٍ ليس بها مجالٌ لمزيدٍ من الاختزالات، والمثال التالي أصغر مثالٍ حسابي:Ω = (λ س . س س) (λ س . س س).

يختزل الحد Ω دائماً إلى نفسه إذا كانت سلسلة الاختزالات تقدم نهايةً، عندما لا يكون من الممكن وجود مجالاً لاختزالاتٍ أكثر، نقول أن الحد يختزل إلى شكلٍ طبيعي مثل Ω الذي يوضح أنه ليس لكل حدٍ شكلٌ طبيعي[2].

هناك عدم تماثل محدود في الصيغة الأساسية β بيتا؛ فالقضية:

(λ س . س^{٢}+ ١) ٣=١٠

يمكن تفسيرها على النحو التالي:"١٠ نتيجة حساب(λ س . س^{٢}+ ١) ٣"، ولكن ليس العكس؛ فهذا الجانب الجمعي سوف يتم التعبير عنه من خلال كتابة:

(λ س . س^{٢}+ ١) ٣ ← ١٠، والتي تقرأ (λ س . س^{٢}+ ١) تختزل إلى ١٠، جزءًا من هذا الجانب التصوري يكون اختزاله مفيداً لتحليل إمكانية التحويل؛ فمبرهنة **تشيرش – روسر**John Barkely Rosser(١٩٠٧-١٩٨٩) تنص على أنه "إذا كان هناك حدان يمكن تحويلهما؛ حينئذٍ يوجد حدٌ يُختزل إليه كلاهما". وفي عديدٍ من الحالات يمكن البرهنة على عدم إمكانية التحويل لحدين من خلال توضيح أنهما لا يختزلان إلى حدٍ عام[3].

عدَّل **ستيفين كول كلين** نسق **"تشيرش"** بطرقٍ نسبيةٍ بسيطة، أهمها أن (λ س . م) تصاغ بشكلٍ جيد فقط عندما تكون **"س** حرة في م"، وهذا التعديل تم الاحتفاظ في جميع المنشورات اللاحقة التي لها علاقة بمصنف حساب – λ عن طريق **"تشيرش، كلين، روسر"**، بعد ذلك نسخ **"كلين"** نتيجة **"روسر"** كما لو كانت لم تنشر أبداً؛ حيث رأى أنه بالنسبة لأي حدٍ للمجموعة، فإنه يمكن أن يوجد حيثما يتم تحويل الحد، وكانت أول نتيجة تتعلق بحساب - λ ويتم نشرها، بعد ذلك جاءت أطروحة كلين عام ١٩٣٥ والتي اعتمدت على تعريف **"تشيرش"**

* Redex : تعني في مجال التكنولوجيا تعبيرٌ يمكن اختزاله Reducible Expression

(1)Loczewski George . P **: Op .Cit** , p.5.

(2)Jung ,Achim: **Op . Cit** , p. 4.

(3)Barendregt ,Henk : **Op .Cit** , p.23.

للأعداد الطبيعية، وفيها أوضح أن نسق **"تشيرش"** كان وحده كافياً للنظرية الأولية للأعداد الطبيعية من خلال البرهنة على بديهيتي **"بيانو"** الثالثة والرابعة، وفي سبيل قيامه بذلك أوضح أن عدد الدالات التكرارية يمكن تقديمها باعتبارها حدوداً - تتعلق بحساب – λ، وتشتمل على دالاتٍ لم يفكر **تشيرش** في إمكانية تقديمها بتلك الطريقة[١]. يجب ملاحظة أن جميع الحدود التي لا يمكن حلها ليس لها صيغة طبيعية رئيسية[٢].

تسمى السلسلة اللامتناهية للأعداد الصحيحة الموجبة بالتكرارية إذا كانت الدالة التي قيمتها ٢ أو ١، على حسب حالة دالة القضية ما إذا كانت صادقةً أو كاذبة تكون تكرارية، ومن خلال الخاصية التكرارية للأعداد الصحيحة الموجبة سوف نعني بدالة القضية التكرارية لعددٍ صحيحٍ موجب، ومن خلال العلاقة التكرارية بين الأعداد الصحيحة الموجبة سوف نعني دالة قضية تكرارية لاثنين أو أكثر من الأعداد الصحيحة الموجبة، وهذه الدالات التكرارية قدمها **"كورت جودل"**، وترجع إلى **"كلين"**[٣].

أما النتيجة المتسقة، والتي تعتمد على بعض النتائج الأخرى فقد حصل عليها **"تشيرش"** مع "**روسر**"، تعقبها نتيجة **كلين** التي أوضحت أن الدالات التي يمكن أن تكون ممثلة في صورة حدود λ هي بدقة تلك التي تتكرر وفق ما قدمه **"جودل"**، وهو ما أعطى معنىً مهماً لما قدمه **"تشيرش"**، لكن النتيجة الأكثر أهمية هي التي تم اشتقاقها في هذا الوقت من الحساب الخالص لـ λ، وفيها أثبت أنه لا يوجد ثابت يمكن حسابه بشكلٍ فعال في صورة دالة تكرارية، والتي سوف تقرر ما إذا كان هناك حدان بعينهما يمكن تحويل أحدهما للآخر[٤].

ومن ثم أطلق عليه علم علامات لامدا الكلاسيكي غير المنمذج λ، والذي يتألف على النحو التالي: التعبيرات(وتسمى بالحدود) تبنى تكرارياً من خلال المتغيرات **"س، ص، ع، ...**، الأقواس، علامات التوقف، الفراغات، والرمز λ"

ح : : =		حدود
س		متغير
(λ س . ح)		سلب
(ح ح)		تطبيق[٥].

(1) Seldin, .P. Jonathan **: Op .Cit** , p.5.
(2)Abramsky Samson **: Op.Cit ,** p.161.
(3)Church .A : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** , p.351.
(4) Seldin, .P. Jonathan **: Op .Cit ,** pp.6-7.
(5)Van Tonder ,Andre '**: Op . Cit** , p. 4.

على سبيل المثال الصيغ λ **أ ب . ب (أ)**، و λ **أ . أ (λ جـ . ب (جـ))** هي من حيث المبدأ صيغة طبيعية ، واستخدام المبدأ الطبيعي هو أمرٌ اقترحه **"كلين"** كوسيلةٍ لتجنب غموض تقرير الشكل الطبيعي للصيغة العسيرة في الارتباطات المحددة.

لاحظ أن الصيغ من حيث المبدأ شكلاً طبيعياً كما بينها **"تشيرش"** و **"جون باركلي روسر"** في بعض خصائص التحويل[1].

والتعرض لحدود لامدا يمكن أن يربك القراءة ، لهذا السبب سوف يقدم اختصاراً يستخدم الرمز "≡"، بالإضافة إلى حذف الأقواس طبقاً للاصطلاح الذي يتداخل مع تجريد لامدا الذي يربط الصيغة من اليمين بالتطبيقات العملية في اليمين.

لاحظ البرنامج البسيط ((λ **س . س**) تفاحة) عندما تتوقف التفاحة على بعض الحدود في لغتنا، مع اختصار التطابق ≡ (λ **س . س**)، وهذا ربما يكتب القراءة بالصورة (تط تفاحة) التي يجب أن تكون نظيراً للتفاحة.

في الحقيقة اختزال بيتا يعطي الصيغة التالية في خطوةٍ فردية:

(λ **س . س**) تفاحة) ← تفاحة .

والجمع يتألف بصفةٍ عامة من سلسلة من اختزالات بيتا، ينفذ طبقاً لبعض الاستراتيجيات الحتمية قبل نتيجة الحد، لا يمكن أن تختزل أي شيءٍ إضافي، وتنهيها نقطة الجمع.

والمثال الأكثر تعقيداً هو الذي يصور كيف أن دالات الحجة المتعددة يمكن تقديمها في حدود دالات الحجة الفردية المتقاطعة Confluence، والذي يقدم من خلال التطبيق التالي:

التطبيق ≡ λ **د . λ س . (د س)**

≡ λ **د . (λ س . (د س))**

الذي يصور الدالة التي تطبق حجتها الأولى **د**، والتي يجب أن تكون دالةً على حجتها الثانية **س**، وبتطبيق دالة التطابق على الموز يجب أن يعطي موزاً، لكي نرى هذا البرنامج (تطبيق تطابق الموز)، يجب أن يكون اختصاراً لـ ((لتطبيق تطابق) الموز)، يتم تقديمه الآن من خلال السلسة التالية من اختزالات بيتا.

((تطبيق تطابق) الموز) ≡ (((λ **د** . (λ **س** . (**د س**)) تطابق) الموز)

← ((λ **س** . (تطابق **س**)) الموز)

---

[1]Church .A : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** , p.348.

← (تطابق موز)

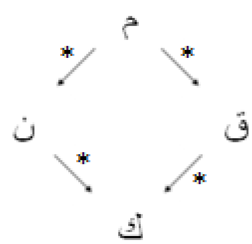
← موز

هناك غالباً أكثر من حدٍ فرعي Subterm يمكن اختزاله في أي خطوةٍ بعينها، من خلال استراتيجية القيمة، وهو ما يعمل كالتالي:

التجريدات(حدود من الشكل (**λ س . ح**)) هي قيم يجب ملاحظتها، وربما لاتختزل أي إضافة.

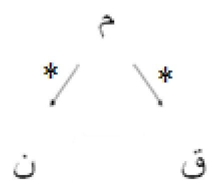
وتطبيق الدالة (**ح ح**) ربما يختزل فقط إذا كان كلاهما ثابت، والثابت يكون قيمة يمكن اختزالها بدايةً[1].

التقاطع يعني أن الحد λ يقدم عددًا من الفرص للاختزال في الوقت نفسه من أجل الحساب الكلي ليقدم معنىً، ومن الضروري أن تكون نتيجة الحساب مستقلة عن ترتيب الاختزال، ويمكننا أن نعبر عن هذه الخاصية لجميع الحدود، وليس فقط لتلك التي لها شكلاً طبيعياً، وهو ما تقدمه مبرهنة (**تشيرش – روسر**) إذا كان الحد **م** يمكن اختزاله في عدة خطوات إلى الحدود "**ن**، و **ق**"، حينئذٍ يوجد الحد "**ك**" لكلٍ من "**ن**، **وق**"، ويمكن اختزالها في عدة خطوات:



النجمة التي تقع قبل الأسهم تشير إلى التعدد بدلاً من الاختزال المفرد أنه "متعدد"، ويمكن أن تعني أيضاً (لا شيء على الإطلاق) للاستدلالات التصورية الواضحة، وهي الخاصية المعبر عنها في مبرهنة "**تشيرش – روسر**"، والتي تسمى أيضاً بالتقاطع أو (الاحتشاد)، وتسمى اختزالاً، والسلسلة التالية سلسلة بسيطة تعد نتيجةً لازمةً Corollary، فكل حد λ يتألف من عددٍ من الذرات التي لها شكلاً طبيعياً واحداً، افترض أن هناك أشكال طبيعية "**ن**، و **ق**" يختزلها حدّ معين وليكن "**م**":

([1])Van Tonder ,Andre '**: Op . Cit** , pp. 4 – 5.



من خلال مبرهنة **"تشيرش وروسر"**؛ فإن هناك حد **"ك"** ، بحيث يكون من الممكن اختزال كلٌ من **"ن**، و **ق"**، على الرغم من أن **"ن**، و **ق"** يظهران في شكلٍ طبيعي لهذا فهما لا يسمحان بأي اختزالٍ إضافي[١].

هذا البرهان يأخذ شكل نسق الشجرة* المتفرعة التي تشير إلى ديناميكيته، إلا أنه قد تم البرهنة عليهما باستخدام وسائل غير بنائية[٢].

ويمكن الحصول على الإضافة من خلال ملاحظة هيكل **ي ف** في تعريفنا للعدد١، على سبيل المثال يمكن أن تفسر باعتبارها تطبيقاً للدالة **"ي"** على **"ف"** إذا أردنا أن نضيف على سبيل المثال ٢، ٣، نطبق فقط تالي الدالة مرتين على ٣، ولنطبق هذا الأمر على المثال التالي لحساب ٢ + ٣:

٢ ي ٣ ≡ (λ ي ف . ي (ي ف)) (λ د ص س . ص (د ص س))

(λ ع س . ع (ع ل))) .

التعبير الأول هو ٢، والثاني الدالة التالية له، والثالث هو٣ (تتم تسمية المتغيرات من أجل الوضوح).

أما مضاعفة عددين **س**، **ص** فيمكن حسابهما باستخدام الدالة التالية :

(λ س ص ف . س (ص ف))

حاصل ضرب ٢ × ٢ يكون حينئذٍ

(λ س ص . س (ص ف)) ٢ ٢

دالتان تختزلان إلى (λ **ف .** ٢ (٢ **ف**)) .

([1])Jung, Achim **: Op . Cit** , pp. 4-5.

* نسق الشجرة: تعريفات نسق الشجرة تعتمد على تعريفات نسق جداول الصدق، وتعول على مفهومي الأشجار المغلقة والأشجار المفتوحة، وتعريف البرهان السليم الخاص بنسق الشجرة يقرر: أن البرهان يُعد سليماً إذا - وفقط إذا- كانت الشجرة الخاصة بالفئة المكونة من مقدمات البرهان ونقيض نتيجته شجرة مغلقة، ويكون غير سليم إذا - وفقط إذا- كانت الشجرة الخاصة بتلك الفئة شجرة مفتوحة، والخلاف الأساسي بين نسق الشجرة (ن ش)، ونسق جداول الصدق (ن ج ص) يتعلق بالتعريفات الخاصة التي يعتد بها كلٌ منهما لتوضيح سبل تعاملهما مع البراهين والفئات والقضايا: انظر: د. نجيب الحصادي: **أسس المنطق الرمزي المعاصر**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر والتوزيع،**١٩٩٣**، من ص١١٤: ص ١٣٢ حتى ص ١٣٤.

([2])Coquand, Thierry: **A Logical Approach to Abstract Algebra,Institution for Datavetens Kap**, Chalmers Tekniska Hogskola,Goteborg,Sweden, S.B.Cooper,B. Lowe,and L. Torenvliet (Eds): CIE, 2005, LNCS 3526,PP.86-95,2005.Springer-Verlag,Berlin,Heidlelberg, 2005,P.88.

ويمكن التحقق من هذا الأمر من خلال أي اختزالٍ آخر لهذا التعبير، وسوف تكون النتيجة المتوقعة هي النتيجة نفسها٤[١].

إن جمع الدالة مرات، والمضاعفة الأسية لها يمكن تقديمها من خلال حساب – λ باستخدام أعداد **"تشيرش"**، إلا أنه يمكن رؤية جميع الدالات التكرارية التي يمكن عدها من خلال حساب – λ، ولهذا الأمر نستخدم نسقاً مختلفاً من الأعداد، كذلك قيم الصدق والشرط Conditional يمكن تقديمها في حساب – λ.

تعريف ١ : صدق ≡ **ك**، كذب ≡ **ك**.

إذا لاحظناها بمعنىً **"بولياني"**؛ أي بمعنى حد إما أن يكون صادقاً أو كاذباً، حينئذٍ:

إذا كانت **ب** فإن **ق** و**ل** يمكن تصويرها من خلال **ب ق ل**[٢].

يمكن ربط التكرارية بكل الصيغ المصاغة بشكلٍ جيد، وبالإحصاء التكراري للصيغ لما يمكن تحويله، وهذا يعني وجود دالة تكرارية معرَّفة لعددين صحيحين موجبين يرمز لها بالرمز "أ" مثل إذا كانت ص تصويراً للصيغة المصاغة بشكلٍ جيد عند **جودل**؛ حينئذٍ تكون أ **(س، ص)** تصويراً للصيغ **"س"** في تعداد الصيغ التي يمكن تحويل الصيغ **"ص"** إليها[٣].

فضل علماء الرياضيات نظرية المجموعات البديهية (Axiomatic) على نسق **"تشيرش"** حساب – لامدا، لكن **تشيرش** أعاد اكتشاف الآداة متعددة الاستخدامات AVersatile Tool في الحاسب الآلي التي قدمها كلٌ من **"جون مكارثي، كريستوفر ستراشي، جوزيف لاندين** Joseph Landin، و**سكوت"** عام ١٩٦٠[٤].

وحساب –λ حسابٌ اقتصادي في الدالات، لكنه يخفي المدى الذي ينبع من أصوله هذا الحساب في المنطق الرياضي، فيكتب التعبير في حساب–λ في شكل تصدير Prefix محدد، ولهذا لايوجد مجالٌ لإقحام أو إزالة الثوابت مثل: (+، -، (-)، إلخ) علاوة على أن الدالة والبرهان Argument يكتبان ببساطة بجوار بعضهما البعض دون أقواس حول البرهان، لذلك بينما يكتب عالم الرياضيات ومبرمج الحاسب الآلي جيب الدالة Sin جا **(س)**، نكتب جا **(س)** في حساب –λ بطريقةٍ أبسط من ذلك، إذا أخذت الدالة أكثر من برهان؛ فإنها حينئذٍ تصطف ببساطة بعد الدالة، ومن ثم **"س + ٣"** تصبح **"+ س ٣"**، و**"س**^{٢}**"** تصبح **"س س"**، وتستخدم الأقواس فقط

([1])Rojas, Raul : **Op .Cit** , p.5.
([2])Barendregt, Henk : **Op .Cit** , p. 17.
([3])Church .A **: A Note on The Entscheidngs Problem**, p.40.
([4])Jung, Achim**: Op . Cit** , p.2.

لفرض تنظيمٍ خاص على المجموعات، على سبيل المثال بينما ينبغي أن نكتب "جا (س) + ٤" بصورةٍ طبيعية؛ فإن صياغتها عن طريق حساب –λ تكون بالصورة: "+ (جا س) ٤"[١].

ولهذا السبب وضع **تشيرش** المصطلح الرمزي λ ضمن مجموعة من الرموز{ }، λ، [،]، ( )، ومجموعة لا متناهية من الرموز التي تشير إلى المتغيرات أ، **ب، جـ**، .....، وقد رأى **تشيرش** أنه يمكن أن يتم الحساب الفعال للصيغ من خلال إحدى صيغتين:

أ – دالة الأعداد الصحيحة الموجبة، والتي يمكن تسميتها إمكانية الحساب في حالة تعريف λ بمعنىً أقل من ٢.

ب – دالة الأعداد الصحيحة الموجبة، والتي تسمى إمكانية الحساب الفعال إذا كانت تكرارية، بمعنىً أقل من ٤.

ويرجع تعريف مفهوم λ إلى **"كلين"**، أما مفهوم التكرارية الأقل من ٤ فيرجع بصورةٍ مشتركة إلى كلٍ من **"جاكوس هيربراند*** Jacques Herbrand(١٩٠٨-١٩٣١)"، **وكورت جودل** ، وتعوض الأنساق المختزلة عن خاصية **"تشيرش – روسر"**، والتي تنص على أن الصيغة الطبيعية التي نحصل عليها تكون مستقلةً عن ترتيب تقدير الحدود الفرعية[٢].فقد استجاب كلٌ من **"تشيرش، كلين، روسر"** لعدم التناسق من خلال استخراج حساب – λ من ضمن حدود نسق **تشيرش**، وهي ما يطلق عليها حساب – λ الخالص، وقد تناول جزءٌ من النسق تشكيل حدود – λ، وقواعد الاختزال والتحويل، حتى في أطروحة **تشيرش** كان لديهم استدلالاً لأهمية الحساب الخالص لـ - λ، وفي السنوات اللاحقة لاكتشاف عدم التناسق حصلوا على عددٍ من النتائج الرئيسية التي تحدد بكاملها معاملة حساب - λ الخالص كنسقٍ خاصٍ[٣].

ويظهر هذا الأمر بوضوحٍ في التأكيد على تشابه لغات البرمجة، كما في لغة "باسكال Pascal" التي تعد من اللغات ذات الأغراض العامة؛ فهي تستخدم في تطوير البرامج العلمية والتطبيقات العملية، وقد تكون أكثر تعقيداً في التعلم والتطبيق مقارنةً بغيرها، وهي لغة صالحة للاستخدام في معظم الحاسبات[٤].

---

(1)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic ,** p.346.

***جاكوس هيربراند** Jacques Herbrand: منطقي فرنسي أو كما يطلق عليه الشاب المعجزة، حصل على لقب أفضل طالب عام ١٩٢٥ وتوفي بعد ذلك بست سنوات في حادث في فرنسا عام ١٩٣١ عن عمر ناهز ثلاث وعشرين عاماً، ورغم صغر سنه إلا أنه ترك ميراثاً ممتازاً في المنطق والرياضيات، كان من بينه ما أشار إليه **تشيرش** في هذا الموضع انظر:

Gabbay, Dov. M., Woods. Jon : Hand Book of Logic from Russell to Church, Vol .5, 1st ed, Published In 26th May 2009, p.195

(2)Church .A : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory**, p.346.

(3) Seldin, .P. Jonathan **: Op . Cit ,** p.6.

(٤) د: ياسر يوسف عبدالمعطي: **مقدمة في الحاسب الآلي وتطبيقاته مع التطبيقات والتجارب العربية في المكتبات ومراكز المعلومات،** شركة المكتبات الكويتية، ط١، الكويت، ١٩٩٤، ص ١٣٠.

وفيها على سبيل المثال:

الدالة **د** (**س** : تعريف) : تعرف أولاً **د** : ٣ * **س** نهاية

| | | |

λ **س** **.** ***٣س**

ربما يظهر الشيء نفسه في لغة "ليسب Lisp*":

(لامدا **(س)** (***٣س**))

الدالة التي كتبت في المصطلح الرمزي **λ** يمكن أن تستخدم نفسها في التعبير، وعلى سبيل المثال عند تطبيق الدالة على القيمة ٤ كتبت بالطريقة (**λ س . *٣س**) ٤، وفائدة الأقواس أن تجعل لتعريف الدالة نهاية، إذا كتبنا **λ س .** * ٣**س** ٤؛ حينئذٍ سوف تصبح ٤ جزءًا من أجزاء الدالة، وسوف نحصل على الدالة التي تحدد القيمة ٣***س***٤(تبدو أن* تفسر باعتبارها دالة ٣؛ غيرأن الحد **λ** بلا معنىً) والسبب في ذلك كما ذكرنا أن الأقواس تستعمل في ترسيم Delineating أجزاء الحد **λ**، وهي لا تملك معنىً جوهرياً في حد ذاتها[1].

لقد أوضح "**تشيرش**" أن الحالة العامة لمشكلة القرارات غير القابلة للحل في أي نسقٍ من أنساق المنطق الصوري التي تكفي لجزءٍ محدد من الحساب تتمثل في اتساق ω، والغرض الأساسي هو تشكيل ماصدقاً Extension يقترب من حساب الدالة المقيدة ل"**هيلبرت**" و"**ويلهيلم آكرمان** Wilhelm Ackermann" (١٨٩٦-١٩٦٢)[2].

إذا كان التعبير يضم متغيراً ـ على سبيل المثال **س** ـ حينئذٍ يمكن صياغة الدالة التي يمكن الحصول عليها من خلال وضع العلاقة Relationship في الاعتبار بين قيمٍ محددةٍ بالنسبة لـ "**س**" تؤدي إلي قيمةٍ للتعبير، وأحياناً تكتب صياغة الدالة في الرياضيات في صورة معادلة "**د (س) = ٣س**"، وأحياناً كما في تصوير:

← ٣**س** . في حساب ـ**λ** المصطلح الرمزي الخاص يلائم الاستغناء مع الحاجة لإعطاء اسماً للدالة (كما في د**(س) = ٣س)** التي توازن بكل سهولة بين تعريفات الدالات الأكثر تعقيداً في مثالٍ بعينه، ولذلك تعاد كتابة التعبير "**٣س**" إلى "* **٣س**"، ومن ثم نحوله إلى دالة من خلال اجتيازه بـ "**λ س**"، وسوف نحصل على "**λ س .**

* **لغة "ليسب** Lisp هي أحد لغات الذكاء الاصطناعي التي تمثل أهم ملامح الجيل الثاني الذي امتاز بظهور لغات البرمجة الراقية High Level Languages ، فقد اخترع "**جون باكوث**" مع فريق من شركة "**أي . بي . إم**" لغة "**فورتران**" Fortran عام ١٩٥٦كأول لغة برمجية علمية، وظهرت مفاهيم الذكاء الاصطناعي وبعض لغاته مثل لغة "**ليسب**" التي اخترعها **جون ماكارثي** ، وهي أول لغة برمجة خاصة بالذكاء الاصطناعي لتمثيل المعرفة ومعالجة البيانات(كيفية جعل الآلة تفكر) انظر (د: محمد مؤنس:**أسس الحاسبات الآلية** ، دار الهدى للنشر والتوزيع، ط١، المنيا ، ١٩٩٩ ، ص ص ٢٣ – ٢٤.)

(1)Barendregt, Henk & Barendsen, Erik **: Op . Cit** , p.6.

(2)Jung, Achim **: Op . Cit** , pp.2-3.

* ٣**س"**، حيث تشبه **λ** هنا كلمة "دالة" في بعض لغات البرمجة، إنه ينبه القاريء إلى أن المتغير الذي يعقبه ليس جزءًا من التعبير، وإنما إجراء صوري متغير Parameter لبيان Declaration الدالة، وتعرف النقطة التي تقع بعد العامل المتغير الصوري جزء الدالة الأساسي(١).

أما التصور الرئيسي الذي يدور حوله حساب–**λ** فيتمثل في كونه "تعبيراً"، أو "اسماً"، أو "متغيراً"، لكنه يكون معرفاً من أجل الهدف الذي نسعى إليه، ويعرف التعبير بصورةٍ تكرارية كالتالي:

< تعبير >: = < اسم > | < دالة > | < تطبيق >

< دالة > : = λ < اسم > . < تعبير >

< تطبيق > : = < تعبير > < تعبير >

يمكن تطويق التعبير بأقواسٍ لمزيدٍ من الوضوح، فإذا كانت ع تشير إلى تعبير، فإن **(ع)** مع إضافة الأقواس تشير إلى التعبير نفسه، ويشار إلى الكلمات الرئيسية التي تستخدم في اللغة بـ **λ**، والنقطة "."، وذلك من أجل تجنب التعبيرات المبعثرة، ليصبح اصطلاح الدالة تطبيقياً(٢).

تعرَّف الدالات في أسس نظرية الفئات العادية لتكون فئاتٍ ذات أزواجٍ مرتبة؛ بحيث لا يكون لزوجان محددان العنصر الأول نفسه، وحينئذٍ إذا كانت **"س"** تقع في المجال نفسه للدالة **"د"**؛ فإن **(س)** يتم تعريفها لتصبح العنصر الثاني للزوج المرتب الذي يكون عنصره الأول **"س"**، ويتم بذلك تعريف الدالة التربيعية للأعداد الحقيقية على النحو التالي: **د** = [(**س** ، **س**٢): **س** عدد طبيعي]

و **د** (٣) = ٣^{٢} = ٩.

وتقدير Evaluation الدالة بـ **"س"** = ٣ يكتب بالطريقة:

(**س** ← **س**^{٢}) (٣) = ٣^{٢} = ٩.

تناول هذه الفكرة **"تشيرش"** عام ١٩٢٠، لكنه كتب بدلاً من:

س ← **س**^{٢}، الصيغة: (**λ س . س**^{٢}) ٣ = ٣^{٢} = ٩.، ولم يكن هذا هو مصطلحه الرمزي الأصلي، فقد استخدم المصطلح بالصورة التالية: {**λ س** [**س**^{٢}] } = ٣^{٢} = ٩، كما أنه لم يكتب "=" في نصه القياسي، وإنما كتب بدلاً منها "ينعكس Conversion"، وهنا يشير لـ "= *" بالعلاقة العكسية غير المحددة(٣).

(1)Church .A : **A Note on The Entscheidngs Problem,** p.40.
(2)Rojas, Raul**: Op . Cit** , p.1.
(3) Seldin, .P. Jonathan **: Op .Cit** , pp.1-2.

لاحظ أن النسق الذي ينشأ عن حساب الدالة المقيدة من خلال إضافتها يكون مثل الرموز الإضافية غير المحددة؛ فبالنسبة للعدد١(تتم ملاحظته كعددٍ فردي) والرمز **"ش"** يعبر عن الدالة الحسابية **"س + ١"**، والرمز **"أ"** بالنسبة لحساب دالة **"أ"** مثل البديهيات الإضافية التي تستخدم في الدالة التكرارية لـ **"أ"**، ومثل البديهيات الإضافية المعادلات التكرارية للدالات"أ، **ب**١، **ب**٢، .... **ب ن"** التي تعبر عن المتغيرات الفردية، فئة الفرديات تؤخذ كتطابقٍ مع دالة الأعداد الصحيحة الموجبة، وبديهيتي التساوي **"س = س"**، و **"س = ص ← [د(س) ← د (ص)]**"[1].

يمكننا أن نرى من خلال تعريف تعبيرات λ المقدمة سابقاً المعرِّف الفردي من خلال تعبيرλ، فتكون "**λ س . س**" تعبيرٌ عن دالة التطابق، والاسم الواقع بعد λ يسمى معرَّف حجة الدالة، والتعبير الواقع بعد النقطة (في هذه الحالة تكون **س** حالة فردية) يسمى هيكل body التعريف.

ويمكن تطبيق التعبيرات بالشكل "(**λ س . س) ص"**؛ فتطبق دالة التطابق على **"ص"**، وتستخدم الأقواس لتجنب الغموض، ويتم تقييم تطبيقات الدالة من خلال استبدال قيمة الحجة **"س"** بـ **"ص"** في هيكل الدالة بالشكل التالي:

"(λ س . س) ص = [ص / س] س = ص"

وفي هذا التحويل يستخدم المصطلح الرمزي **[ص / س]** للإشارة إلى أن جميع وقائع **"س"** تستبدل بـ **"ص"** في التعبير[2].

ويرى **"تشيرش"** أنه إذا كانت **"د"** تصور من خلال الرمز الفردي مثل **د (س، ص)**، {{{**د**} **(س)**} **(ص)** } **(ع)** يمكن اختصارها بالصورة {**د**} (**س، ص، ع**)، أو بالشكل **د (س، ص، ع)**، وهكذا.

والصيغة λ **س**١ [λ **س٢** [.... λ **س ن** [**م**] ....]] يمكن اختصارها بالشكل التالي:

λ **س**١، **س**٢، .....، **س ن . م**، أو بالصورة λ **س**١ **س**٢ .... **س ن م .**

ويسمح **"تشيرش"** بتقديم اختصارات للصيغة التي يتوقف من خلالها الرمز الفردي "أ" على التسلسل الفردي للرمز**"أ"**، ويشير لمقدمة هذه الاختصارات بالمصطلح الرمزي التالي:

أ ← **أ**، والذي يعني أن "أ تتوقف على أ"، ويقدم لإحدى القوائم اللامتناهية Infinte للاختصارات بالصورة التالية:

---

(1)Church .A : **A Note on The Entscheidngs Problem,** p.40.
(2)Rojas. Raul : **Op .Cit**, p.3.

١ – λ أ ب . أ (ب)

٢ - λ أ ب . أ (أ (ب))

٣- λ أ ب . أ (أ (أ (ب))).

وهكذا كل عددٍ صحيح موجب بالمصطلح الرمزي يتوقف على صيغة من الشكل:

λ أ ب . أ (أ (... أ(ب) ...))[١].

عندما نجعل حساب λ منهجاً من البداية، يكون هناك تشوشاً، لأنه لا يفترض أن نعطي أسماءً للدالات في أي وقتٍ نريد فيه تطبيق الدالة، لذلك تُكتب الدالة كاملة، وبعد ذلك نقوم بتقييمها بهدف تبسيط المصطلح الرمزي، لذلك تستخدم الأحرف الكبيرة للتعبير عن الأعداد دون العشرة، وبعض الرموز الأخرى كترادفات لبعض تعريفات الدالة؛ فعلى سبيل المثال دالة التطابق يمكن الإشارة إليها بالرمز **"|"**، والتي ترادف الشكل:

|| ≡ (λ س . س) (λ س . س).

في التعبير السابق تكون أول **"س"** في هيكل التعبير الأول في الأقواس مستقلة عن**"س"** التي تقع في هيكل التعبير الثاني، ويمكن إعادة كتابة التعبير السابق بالصورة:

|| ≡ (λ س . س) (λ ز . ز).

وبتطبيق دالة التطابق على نفسها

|| ≡ (λ س . س) (λ ز . ز).

ينتج إذن:

[λ ز . ز / س] س = λ ز . ز ≡ |

وهو ما يشير إلى دالة التطابق بصورةٍ أخرى. ويجب أن نحذر عند آداء الإبدال تجنباً لخلط الوقائع الحرة للمعَّرف بغيرها من الوقائع المقيدة في التعبير:

(λ س . (λ ص . س ص)) ص[٢]**.**

تصاغ الصيغ بشكلٍ جيد عند **"تشيرش"** من خلال الثوابت الذرية والمتغيرات، بالإضافة إلى **"λ"** المجردة؛ حيث تكون **"λ س . م"** مصاغة بشكلٍ جيد سواء إذا كانت **"س"** حرة في **م**، و بالإضافة إلى بديهياته وقواعده الخاصة بالثوابت المنطقية قدم إلى ثلاث قواعد للإجراء تتعلق بالسلب، التطبيق، الاستدلال: (١) تغيير المتغيرات

---

(1)Church .A : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** , p.347.
(2)Rojas, Raul : **Op .Cit** , p.4.

المقيدة: أ - الانعكاس، ويستخدم علم المصطلحات الفنية Terminology، (٢) ب- التقليص Contraction ويكون في التعبير الذي يمكن اختزاله Redex * (**λ س . م) ن، س** يجب أن تظهر كصيغةٍ حرة في **م** . (٣) العكس Reverse[1].

ويلاحظ **تشيرش** أن الصيغ التي تتألف من الرموز التي بلامعنىً يتعلق بها، لا يمكن أن تعرف إجراء البرهان أو تبرر دلالة صيغة بصيغةٍ أخرى؛ فإذا كانت المصادرات التي نستخدمها معبرٌ عنها بالكامل من خلال رموز المنطق الصوري دون استخدام لأي كلماتٍ أو رموزٍ لها معنىً؛ فإنه لن توجد مبرهنات ماعدا المصادرات أنفسها، غير أننا ملتزمون باستخدام بعضها على الأقل في شكل مصادراتٍ لرموزٍ أخرى بدلاً من الحدود غير المعرفة للنسق الصوري[2].

ويسمي **"تشيرش"** أي سلسلةٍ متناهية من الإجراءات تحويلاً؛ فإذا كان من الممكن الحصول على"**ب**" من "أ" عن طريق التحويل؛ فإننا نقول أن "أ" يمكن أن تحول Convertable من خلال "**ب**"، أو "أ تحول عن طريق **ب**"، إذا كانت "**ب**" تتطابق مع "أ"، أو يمكن الحصول عليها من خلال "أ" عن طريق تطبيق أحد الإجراءات الثلاثة "١، ٢، ٣، نقول أن "أ" يمكن أن تحول حالياً من خلال "**ب**".

التحويل الذي يضم تطبيقاً واحداً تماماً للإجراء ٢، ولا تطبيق للإجراء ٣ يسمى اختزال.

وتكون الصيغة في شكلٍ طبيعي Normal إذا كانت مصاغة جيداً ولا تضم أي جزءٍ من الشكل: {**λ س [م]** } **(ن)**، وتكون "**ب**" شكلاً طبيعياً من "أ" إذا كانت "**ب**" شكلاً طبيعياً و "أ" تحول من خلال "**ب**"[3].

وقد قسم **"تشيرش"** المصادرات إلى مجموعتين: الأولى تتألف من قواعد الإجراء Procedure، والثانية تتألف من المصادرات الصورية والتي تؤكد أن صيغةً بعينها صادقة، ولاتضم شيئاً من لغة المنطق الحدسي غير أن الكلمات صادقة، وهذا يعني أن الصيغة المحددة صادقة، ويتألف برهان المبرهنة من سلسلة من الخطوات، من مجموعة مصادرات أو أكثر للمجموعة الأولى كنقطة بداية تقودنا إلى البديهية، تحدد كل خطوة من خلال الاستعانة بقواعد الإجراء[4].

يمكن كتابة د(٤) بدلاً من (**λ س . * ص س**)٤.

(1) Seldin, .P. Jonathan **: Op . Cit**, p.4 .
(2)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic , The annals of Mathematics ,** p.349 .
(3)Church .A : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** , p.348.
(4)Church .A: **A set of Postulates for The Foundation of Logic , The annals of Mathematics ,** p. 355.

مع وضع حساب λ كآداةٍ رمزية شبه مكتملة، يوجد أكثر من حالةٍ واحدة يمكن وضعها في الاعتبار، افترض أن جزء الدالة يتألف من دالةٍ أخرى كالتالي:

ن = λ ص . (λ س . * ص س)

إذا طبقنا هذه الدالة على القيمة ٣ سوف نعود إلى صيغتنا القديمة "**λ س . * ٣ س**"، بمعنىً آخر، تكون "**ن**" دالةً عندما نطبقها على العدد تعود إلى دالةٍ أخرى (أي بمعنى **ن** ٣ تتصرف مثل **د**) على الرغم من أنه يمكن اعتبارها دالة لبرهانين، بينما يمكننا أن نحصل على العدد قبل ذلك إذا عوضنا عن "**ن**" ببرهانين رياضيين (**ن** ٣ ٤ يجب أن تقدر بـ ١٢)، كلا الرأيين قانوني Legitimate، ويتألف كلٌ منهما من الآخر تماماً؛ أي إذا أردنا تأكيد التفسير الأول ربما نكتب الحد مع الأقواس كما سبق، وإذا أردنا أن نراها كدالةٍ لبرهانين يمكننا حينئذٍ ترك الأقواس بالصورة:

λ ص . λ س .* ص س

أو بصورةٍ أقل وضوحاً حتى وإن حذفنا لامدا الثانية بالصورة:

λ ص س . * ص س

لكن يلاحظ أن هناك اختزالٌ حقيقي للحد الرسمي، كذلك في تطبيق ن على البراهين ٣، ٤ يمكننا أن نستخدم الأقواس للتأكيد أن ٣ تستخدم أولاً "(**ن** ٣) ٤ أو يمكننا اقتراح تطبيقاً متزامناً: **ن** ٣ ٤. أياً كان حدسنا عن **ن**؛ فإن النتيجة سوف تكون الشيء نفسه (أي ١٢)(١).

لقد أثبت "**تشيرش**" أن الإجراء الذي لايمكن حسابه بشكلٍ فعال لايمكن أن يحدد ما إذا كان للحدود شكلاً طبيعياً أم لا، وهو ما أثاره "**جودل**" تجاه مشكلة العدد الأولي، أما "**تشيرش**" فقد أنهى بحثه لافتاً الانتباه إلى نتيجته تتضمن أي نسق صوري يشتمل على حسابٍ أولي(٢).

خلاصة الأمر أنه كان هناك أكثر من استخدام لحساب-λ صاغها كلٌ من "**تشيرش**" عام ١٩٣٠، و "**كلين**" عام ١٩٣٦ الذي أوضح في بحثٍ له كيفية تمثيل بعض الأعداد الترتيبية بحدود –λ، كما ناقش **تشيرش** هذا التمثيل وعلاقته الاستدلالية في بحثٍ له عام ١٩٣٨، وأن ملخص جميع نتائج حساب – λ حتى هذه النقطة يظهر في بحثٍ ل**تشيرش** عام ١٩٤١.

بعد هذه النتائج التي تم الوصول إليها تخلى كلٌ من "**تشيرش، كلين**، و**روسر**" عن النسق الأساسي للمنطق أو حساب – λ، فقد انتقل **كلين** من نظرية الدالة التكرارية، ولم يتعامل مع التمثيلات في حساب – λ، أما **روسر**

(1)Jung, Achim **: Op . Cit** , p.3.
(2) Seldin, .P. Jonathan **: Op .Cit ,** p.7.

فقد بدأ من المنطق التوافقي، وتخلى **"تشيرش"** نفسه عن محاولة بناء نمط من المنطق الحر يعتمد على حساب – λ[١].

الخاتمة

لقد كان **"تشيرش"** بحسابه النسقي "لامدا" أقرب إلى الرياضيات والجبر منه إلى المنطق، وهو ما نلمسه بوضوح إذا أردنا أن نستعرض النسق الاستنباطي للمنطق الرياضي، فنجد أن منطق **"جورج بول"** على سبيل المثال يقترب من الجبر على حساب المنطق، ولأن حساب لامدا لايخلو من فائدةٍ عملية عند تطبيقه في المنطق الرياضي ولغات برمجة الحاسب، فإن هذا الأمر يعكس مدى ارتباط المنطق بمجالات الحياة اليومية، والأهمية القصوى التي يحتلها في عالمنا الواقعي، إذ لم يعد قاصراً على الأنساق الرياضية المجردة فقط، أو الأنساق الهندسية الصورية، إنما تعديه لكل هذه الحالات الصورية، وتطبيقه بشكلٍ عملي على الأجهزة التي لا غنى لنا عنها في الواقع، بل إن ذروة هذه الطفرة العملية هي ماوصل إليه المنطق الغائم وعلاقته المعروفة بمجالات الذكاء الاصطناعي والنظم الخبيرة، فأغلب تطبيقات المنطق الغائم الناجحة هى جزء لا يتجزأ من وحدات التحكم، وكما هو متبع فى نشاطات البحث العلمى يكون الأمر مشابه تماماً لما يحدث فى المنطق الغائم؛ حيث يكون دأب المنظرون في العديد من الأنساق المتنوعة البحث في إمكانية تطبيقها، ومن ثم اتضحت أهمية حساب لامدا من خلال تطبيقه في مجالات الحاسب الآلي ولغات البرمجة، وقد اتسع مجال البحث في هذه الأنساق بعد نسق حساب لامدا فيما تناوله "بير مارتن لوف Per Martin Lof"* (١٩٧٥ – ١٩٨٤)، و"جين يفز جيرارد Jean – Yves Girard" (١٩٧١-١٩٧٢) فيما عرف بأنساق "جيرارد" التي توسع فيها "كوكاند Coquand، وهوت Huet، وروبرت كونستابل Robert Constable" وآخرون[٢].

قائمة المصادر والمراجع

أولاً: المصادر:

([1])Ibid , p. 8.

* **بير مارتن لوف**: فيلسوف ومنطقي سويدي ولد في ٨مايو عام ١٩٤٢، اشتهر بأعماله في أسس الاحتمالات والإحصاء وأسس المنطق الرياضي وعلوم الحاسب منذ فترة السبعينات، معظم كتاباته في المنطق وفلسفة المنطق، السلاسل المنطقية، النتائج، الأحكام، تأثر نوعاً ما بفريجة و هسرل في المنطق الرياضي (الباحث).

([2]) Seldin, .P. Jonathan **: Op .Cit ,** p. 9.

(1) A . Church : **A Note on The Entscheidngs Problem** , The Journal of Symbolic Logic , Vol . 1 , NO . 1 . (Mar . 1936).

(2) ………… : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** , American Journal of Mathematics , Vol . 58 , No .2.(Apr . , 1936).

(3) …………… : **A set of Postulates for The Fondation of Logic , The annals of Mathematics ,** 2nd ser **,**Vol . 33, No .2.(Apr . , 1932).

ثانياً: المراجع الأجنبية

(1) Abramsky, Samson **: Full Abstraction In The Lazy Lambda Calculus** , Department of Computing , Imperical College of Science Technology And Medicin , Copyright , 1993 by Academic press Inc , Information And Computation , 105 ,159 -276 , 1993.

(2) Abramsky, Samson : **The Lazy Lambda Calculus** , Department of Computing , Imperical College of Science Technology And Medicin , Published in Reasearch Topics In Functional Programming , ed . D . Turner , Pages 65 -117 , Addison Wesley , 1990 , December , 17 , 1987.

(3) Bachmair, Leo , Ganzinger, Harlad **: Equational Reasoning in Saturation-Based Theorem Proving** , February 19, 1998.

(4) Barendregt, Henk : **Introduction to Lambda Calculus** , Revised edition , December 1998, March 2000.

(5) Coquand ,Thierry: **A Logical Approach To Abstract Algebra,Institution For Datavetens Kap**, Chalmers Tekniska Hogskola,Goteborg,Sweden, S.B.Cooper,B. Lowe,and L. Torenvliet (Eds): CIE, 2005, LNCS 3526,PP.86-95,2005.Springer-Verlag,Berlin,Heidlelberg, 2005.

(6) Coquand ,Thierry**: Type Theory**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 1st Published, Wed Feb 8, 2006, Substantive Revision Wed, Jan 20, 2010.

(7) Felice, Cardone; Hindley, J. Roger: **"History of Lambda-Calculus And Combinatory Logic**", in Gabbay, Dov M.; Woods, John, Handbook of The History of Logic, 5, Elsevier.

(8) Fellesien, Mathias , Flatt ,Mathew: **Programming Language And Lambda Calculi** , (Utah CS7520 Version) Draft : March 8 , 2006 , Copyright , 1989 , 2003 .

(9) Gabbay. Dov, M.& Woods .Jon **: Hand Book of Logic from Russell to Church**, Vol .5, 1st ed, Published In 26th May 2009.

(10) Gilles Barthe Peter Dybjer: **Applied Semantics**, International Summer School,Appsem 2000, Springer, Caminha, Portugal,September 9-15,2000.

(11) Guthrie, Edwin: **Russell's Theory of Types**,The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods, Vol. 12, No. 14 Jul. 8, 1915.

(12) Hintikka. Jaako: **Logic, Language – games, And Information KANTIAN,**Themes in philosophy of logic, Oxford, Clarendon Press, Oxford, 1973.

(13) Jonathan . P . Seldin **: The Logic of Curry And Church ,** Departement of Mathematics And Computer Science , University of Lethbridge , Lethbridge , Alberta , Canda , March , 3 , 2008.

(14) Jung, Achim : **A short Introduction to The Lambda Calculus** , School of Computer Science,The University of Birmigham, Edgbaston, Birmingham, March, 18, 2004.

(15) Linsky, Bernard: **Logical Constructions**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 1st Published, Wed Nov20, 1996.

(16) Loczewski .P. George: **The Lambda Calculus** , A Brief Introduction , Stmv , S. Toeche- Mittler verlag , Darmstadt , Germany ,1989.

(17) Messer ,John Davis**: Quine's Paradox of Attribute Detremination,** Auburn University, 1978.

(18) Milner, Robin: **A Theory of Type Polymorphism in Programming**, Computer Science Department, University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland,Journal of Computer and System Science,17,348-375,1978.

(19) Monk ,Donald. J . **: Mathematical Logic** , Springer- Verlag , New York , Heidelberg , Berlin , 1976 .

(20) Piergiorgio, Odifreddi and Barry, S. Cooper "**Recursive Functions**", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.).

(21) Plotkin, Gordon, Stirling, Colin & Tofte. Mads: **A Brief Scientific Biography of Robin Milner**, MIT Press Cambridge, MA, USA ,2000.

(22) Plotkin .G.D: **Call-By-Name, Call-By-Value And The λ** Calculus, Department of Machine Imlligence, School of Artificial Intelligmce, University of Edinburgh, United Kingdom, Theoretical Computer Science , 1(1975) 125-159, North- Holland Publishing Company, Received 1 August 1974.

(23) Quine ,W . V: **From A Logical Point of View**, Harvard University Press, Cambridge, Massochsettes, 2nd ed,1961.

(24) Quine ,W . V**: Mathematical Logic**,Revised ed, Cambridge, Harvard University press, New York , 1951.

(25) Quine ,W . V: **Predicate Functors Revisited**, The Journal of Symbolic Logic, Vol . 46 , No3, Sept , 1981.

(26) Rojas, Raul : **A Tutorial Introductionto The Lambda Calculus** ,FU Berlin , WS-97/98.

(27) Scott, S.Dana.: **Stochastic λ-Calculi:Anextendedabstract,** ACarnegie MellonUniversity,United States, University of California,Berkely ,UnitedStates,2014 .

(28) Seldin .P. Jonathan: **Coquand's Calculus of Constructions: A Mathematical Foundations for A Proof Development System,** Department of Mathematics, Concordia University, Montreal Quebec, Canda, Formal Aspects of Computting, 1992.

(29) Van Tonder, Andre '**: A Lambda Calculus for Quantum Computation** , Department of Physics , Brown University , July 15 , 2003 , Revised Version : March 24 , 2004 .

(30) Zaionc, Marek: **Mechanical Procedure for Proof Construction Via Closed Terms Typed λ Calculus**, Department of Computer And Information Sciences, University of Alabama At Birmingham,University Station,Birmingham, U S A, September, 1987.

ثالثاً: المراجع العربية والمترجمة إليها:

(١) برتراند رسل: **أصول الرياضيات،** ج٢، ترجمة: محمد مرسي أحمد، مكتبة الدراسات الفلسفية، دار المعارف، القاهرة، ١٩٥٨.

(٢) ديمتريو: **تاريخ المنطق" قراءات حول التطور المعاصر للمنطق"** ج٤، ترجمة د: إسماعيل عبد العزيز، دار الثقافة للنشر والتوزيع، القاهرة، ١٩٩٧.

(٣) سهام النويهي: **أسس المنطق الرياضي** (رؤية حديثة)، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة،١٩٨٧.

(٤) صلاح عثمان: **المنطق متعدد القيم بين درجات الصدق وحدود المعرفة**، منشأة المعارف، الإسكندرية، ٢٠٠٢.

(٥) علي محسن جمجوم: **السيموطيقا ومشكلات الفلسفة**، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ١٩٩٨.

(٦) غازي إبراهيم رحو: **مدخل إلى علم الحاسوب والبرمجة بلغة باسكال**، دار المناهج للنشر والتوزيع، ط١، الأردن، ١٩٩٩.

(٧) ماهر عبد القادر محمد: **نظريات المنطق الرياضي**، دار المعرفة الجامعية، الاسكندرية، ١٩٩٩.

(٨) محمد مؤنس: **أسس الحاسبات الآلية**، دار الهدى للنشر والتوزيع، ط١، المنيا، ١٩٩٩.

(٩)محمود الزهد: **مقدمة في الحاسب الآلي**، معهد الإدارة العامة، المملكة العربية السعودية، شوال١٣٨٠هـ، إبريل ١٩٦١م.

(١٠) نجيب الحصادي: **أسس المنطق الرمزي المعاصر**، دار النهضة العربية للطباعة والنشر والتوزيع،**١٩٩٣**.

(١١) ويلارد فان؛ كواين: **بسيط المنطق الحديث**، نقل د: أبو يعرب المرزوقي، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، ط١،١٩٩٦.

(١٢) ياسر يوسف عبدالمعطي: **مقدمة في الحاسب الآلي وتطبيقاته مع التطبيقات والتجارب العربية في المكتبات ومراكز المعلومات**، شركة المكتبات الكويتية، ط١، الكويت، ١٩٩٤.

(١٣) يمني طريف الخولي: **فلسفة العلم في القرن العشرين (الأصول – الحصاد- الآفاق المعرفية)**، عالم المعرفة، سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، يناير،٢٠٠٠.

رابعاً: المعاجم ودوائر المعارف

(١) **معجم الرياضيات**: وضع لجنة الرضيات بالمجمع، إشراف د.عطية عبدالسلام عاشور، مجمع اللغة العربية، القاهرة،١٩٩٥.

خامساً : معلومات من شبكة المعلومات الدولية (الإنترنت)

(1) ACM Journal of Computer Documentation (JCD):
Dl.acm.org. (2018). ACM Journal of Computer Documentation (JCD). [online] Available at: https://dl.acm.org/citation.cfm?id=J24 [Accessed 14 Feb. 2018].

(2) Church's Type Theory:
Andrews, Peter, "Church's Type Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/type-theory-church/>.
(3)Lambda Calculi | Internet Encyclopedia of Philosophy:

Threlkeld, **Shane Steinert**. (2018). Lambda Calculi | Internet Encyclopedia of Philosophy. [online] Iep.utm.edu. Available at: https://www.iep.utm.edu/lambda-calculi/ [Accessed 14 Feb. 2018].
(4) Robin Milner obituary:
Campbell-Kelly, M. (2018). Robin Milner obituary. [online] the Guardian. Available at:
https://www.theguardian.com/technology/2010/apr/01/robin-milner-obituary [Accessed 14 Feb. 2018].