أما **تشيرش** فقد افترض أن الرموز: "أ، ب، وجـ " على سبيل المثال في الشكل: أ (ب+جـ)= أب+أجـ. تستخدم كمتغيراتٍ حرة، وبالتالي لا نلاحظ أي قضية محددة، لأن قيم القضية تتحدد من خلال المتغيرات، وهذا التحديد إذا لم يكن متضمناً في السياق Context فإنه يتحدد من خلال الإضافة اللفظية، وهنا يسمح المدى range للمتغيرات "أ، ب، جـ" التي من الممكن أن تتألف من الأعداد الحقيقية Real numbers أو من الأعداد المركبة Complex، أو من بعض مجموعات الأعداد الأخرى، أو من المجالات التي تظهر فيها المتغيرات بمعانٍ مختلفة، وتختلف كل معادلة بناءً على ذلك في المعنى، وعندما تكتب هذه المعادلة بمفردها يصعب ترجمتها بالكامل إلى لغةٍ رمزية، ولكي نستطيع أن نقدم ترجمةً كاملةً، فإنه من الضروري التعبير عن الإضافة اللفظية برموز المنطق الصوري التي تنطوي عليها المعادلة في صيغتها المستخدمة لتصوير القضية[١].وهذا الأمر ما دعا بعض المناطقة على حد زعم **"هينتيكا** Jaako Hintikka" (١٩٢٩-٢٠١٥) تأثُر **تشيرش** برأي **كواين** عن الوجود المؤكد فقط، خاصةً فى تفسيراته الخاصة، فمهما يبدو أنه يعني أن العبارة التى سلمت بوجود كل قيم المتغيرات المقيدة لا تحتوي سوى على وجود القيم "إذا أي if any" التي تجعل العبارة صادقة، فإنها بإختصار الأسوار"(∃ س) أ، (س)، و (ي س) ~ أ (س)" التي تحمل إلتزامات الوجود الحقيقي نفسها[٢].

جـ - أثر حساب لامدا فى نظرية لغة البرمجة

من ضمن نتائج حساب لامدا بعيداً عن النتائج الفلسفية أو المنطقية نظرية لغة البرمجة، لكن حتى مصطلح لغة البرمجة يتمتع بأساسٍ فلسفي، فقد سبق ذلك **"برتراند رسل Bertrand Russell**(١٨٧٢- ١٩٧٠)" بمقاله **"الذرية المنطقية"** الذي نشره عام١٩٢٤، قد اعتبرت الصيغ الأولى المحددة لمنهجه في استبدال الاستدلال ببناء منهجاً عاماً في الفلسفة، كما يعد هذا المقال عملاً في البرمجة، حيث وصف في بدايته تعريفات منطقية متنوعة، وقدم للتحليل الفلسفي بوصفه بناءً منطقياً. فوضع أمثلة لبعض التعريفات عرفت باسم **"فريجه - رسل"**، كتعريفه للأعداد بوصفها فئات، ونظرية الأوصاف المحددة، وبناءات المادة من معطيات الحس ومن السلاسل، والأعداد الترتيبية Ordinal، والأعداد الحقيقية real، كما استخدم التعريف "السياقي" للتعبيرعن الفئات أو الطابع المميز لنظرية الأوصاف المحددة، وقام بتسمية هذه التعبيرات باسم الكيانات "أو الرموز غير المكتملة"، وجعل الكيانات

---

(1)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic,** p.346.

(2)Hintikka . Jaako: **Logic, Language – games, And Information KANTIAN,**Themes in philosophy of logic, Oxford, Clarendon Press, Oxford, 1973, p.89.

أنفسها "تصنيفاً منطقياً أو رمزياًSymbolic"[١]. اعتبر هذا المقال البداية الفعلية للغات البرمجة التي بدأت بعد ذلك وتطورت بين عامي (١٩٣٦-١٩٥٠) المصطلح الرمزي الرياضي، فقد دافع مهندسي الحاسب الآلي بشدة عن تصوير العدد، وقاموا باختيار العديد من الصيغ المختلفة قبل الوصول إلى القياسية الحديثة لمركبين للأعداد الصحيحة، وقد كان المصطلح الرمزي لـ**"فييت"** بمثابة الابتكار الأساسي الجديد لـ**"فورتران** Fortran"*، فكانت أو لغة برمجة ذات مستوىً عالٍ، ولم يمضِ وقتٌ طويل على ذلك حتى خرج **"جون ماكارثي**"** John McCarthy(١٩٢٧-٢٠١١) عام١٩٦٠بقائمته للغة التحويل List Processing Language التي تختصر إلى(LISP)، وقد عرف بحساب لامدا λ، وكانت لغته تشبهه إلى حدٍ بعيد. والحقيقة أن حساب لامدا كنسقٍ صوري، قام فيه **تشيرش** بتعريف مفهوم الدالة التي يمكن عدها بواسطة هذا النسق[٢]. وفيه أراد أن يصوغ نسقاً منطقياً رياضياً، لكن لم تكن لديه النية لابتكار لغةٍ للبرمجة، اكتشفت العلامة الجوهرية لنسق البرمجة الذي وضعه في وقتٍ لاحقٍ بعد ذلك بكثير، حتى أنها أصبحت قضيةً في برمجة الحاسبات الآلية، ويُعرِّف حساب لامدا الآتي:

أ- قوانين صياغة الحساب، ب - وتحويل التعبيرات داخل الحساب، وشأنه شأن النسق المنطقي الرياضي يتناوله المبرمجون بالتفصيل، وقد سُمي حساب لامدا بهذا الاسم عام ١٩٨٧[٣].

دور حساب لامدا في حل المفارقات

المفارقات المنطقية متوالياتٌ لا نهائية Infinit Series من الأنماط يتم صياغتها لتلائم الحد الأدنى لمجموعة من الأوليات المنطقية: الاحتواء، والسلب، وهناك جانبان يميزان النظرية هما:ـ المذهب الأنطولوجي، والتقييد الصوري، وسوف يتم تأسيس هذان الجانبان بشكلٍ جديدٍ يخلو من الاحتواء والسلب لتجنب التأثيرات غير المنطقية لنظرية الأنماط، خصوصاً في حالة تكرار أو تضاعف الثوابت المنطقية من نمطٍ إلى نمط في ظل الاعتماد الواضح

---

(1)Bernard, Linsky: **Logical Constructions**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 1st Published, Wed Nov20, 1996.

***فورتران** Fortran:لغة من لغات البرمجة متعددة الاستخدامات، وهي عبارة عن اختصار للكلمتين باللغة الانجليزية Formula، و Translation ابتكرها **جون باكوس** عام ١٩٥٤، وكانت أولى لغات البرمجة ذوات المستوى العالي وتستخدم أساسا في التحليلات العددية وفي الحوسبة العلمية.(انظر: موقع برمجة مدرسة البرمجة العربية).

****جون ماكارثي**: عالم أمريكي من علماء الحاسوب، ولد في ٤ سبتمبرعام ١٩٢٧، وتوفي في٢٣ أكتوبر عام ٢٠١١، حصل على جائزة **آلان تورينج** عام ١٩٧١لإسهاماته المتميزة في مجال الذكاء الاصطناعي، من ضمن المميزات التي امتاز بها اختراعه للغة ليسب LISP عام ١٩٥٨، عمل في معهد ماساتشوستس للدراسات التكنولوجية، وفي جامعات ستانفورد، جامعة دلفت للتكنولوجيا، انظر: . http://dl.acm.org/author_page.cfm?id=81406600200

(2)Jung . Achim : **Op.Cit**, p.1.

(3)Henk Barendregt & Erik Barendsen: **Introduction to Lambda Calculus**, Revised Edition , December 1998, March 2000, p.5.

للحساب المتناهي finite على بديهية اللامتناهي[١].ومن المعروف أن **رسل** أول من وضع نظرية الأنماط من أجل تحاشي المتناقضات التي ظهرت في كلٍ من الأنساق المنطقية والرياضية. وقد لاقت هذه النظرية اهتماماً كبيراً من جانب الكثير من المناطقة أمثال **رامزي** Ramsey Frank Plumpton(١٩٠٣-١٩٣٠) **و كواين** اللذان قاما بتبسيطها[٢].وضع **رسل** نظرية الأنماط في كتابه **"مقدمة للفلسفة الرياضية**١٩١٩" قائلاً: "ليست الرياضيات إلا أنماطاً من العلاقات تُعالج بالأسلوب الرمزي[٣].

أما **رامزي** فقد قدم اقتراحاً مضمونه أن المفارقات تنتمي للمجموعة اللغوية، ويمكن حلها من خلال مراعاة الاعتبارات اللغوية. والاعتبارات اللغوية تتميز عن المجموعة المنطقية بأنها تدخل أفكاراً تجريبية كتلك التي يحكم بها أو يقصدها شخص ما. ومادامت هذه الأفكار ليست منطقية، فمن الممكن التماس حلول تعتمد على شيء آخر خلاف الاعتبارات المنطقية. وهذا ييسر تبسيط نظرية الفئات إلى حدٍ كبير، وهي نظرية كما تظهر طبقاً لمناقشة **رامزي** تقف عن أن تكون مقبولة أو صناعية أو مجرد فرض وضع لتجنب التناقض[٤].

في سبيله حله للمفارقات قدم **تشيرش** للتقييد المحدد لقانون الوسط الممتنع نوعٌ من تجنب المفارقات ـ كما ذكرت ـ التي ترتبط برياضيات اللامتناه، لكنه لم يكتفِ بذلك، فقد أشار إلى الأنماط Types التركيبية التي تشير إلى حدود لامدا، "[٥].

وقد اقترح **تشيرش** أن تحل مفارقات **رسل** المعروفة بـ"مفارقة تقرير الفئة"، التي سماها **رينارد جروسمان** Reinhardt Grossman* (١٩٣١-٢٠١٠) بـ "مفارقات نظرية الصفة" [٦].من خلال تقييد المقدم لقانون الوسط الممتنع من خلال حساب لامدا[٧]. و تصاغ مفارقة **رسل** رمزياً بالشكل التالي:

(س) (س ∈ ج ≡ ~ (س ∈ س))، لأنها تستلزم التعيين الكلي للجملة اللامتناسقة:

---

(1)Quine ;W .V**: From A Logical Point of View**, p.114.

(٢)د: سهام النويهي**: أسس المنطق الرياضي** (رؤية حديثة)، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة،١٩٨٧، ص٣٢.

(٣)د. يمني طريف الخولي: **فلسفة العلم في القرن العشرين (الأصول – الحصاد- الآفاق المعرفية)**، عالم المعرفة، سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، يناير ٢٠٠٠، ص٢٧٤.

(٤)برتراند رسل: **مرجع سابق**، ص١٩.

(٥)د. يمني طريف الخولي: **فلسفة العلم في القرن العشرين (الأصول – الحصاد- الآفاق المعرفية)**، عالم المعرفة، سلسلة كتب ثقافية شهرية يصدرها المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب، الكويت، يناير ٢٠٠٠، ص٢٧٤.

* **رينارد جروسمان** Reinhardt Grossman: فيلسوف أمريكي ولد في ألمانيا في١٠يناير عام ١٩٣١ وتوفي في٢يوليه عام ٢٠١٠.

(6)Messer, John Davis**: Quine's Paradox of Attribute Detremination,** Auburn University, 1978, P.355.

(7)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic,** p.347.

"ج ∈ ج ≡ ~ (ج ∈ ج)، استعمل **كواين** الشكل"**س** ∈ **ج**" للدلالة على الانتماء، وعبر عن كلمة ينتمي بـ"∈"، فأشار إلى العبارة "حسن شحاتة ينتمي إلى فئة الرياضيين بالصورة: "حسن شحاتة ∈ إلى فئة الرياضيين، وكذلك "∈" إلى فئة البشر(١).

اقترح **تشيرش** لحل هذه المفارقة أن تكتب الصيغة "**س**" التي تؤدي إلى هذه المفارقة من خلال المصطلح الرمزي التالي:{λ ψ . ~ ψ (ψ)} (λ ψ . ~ ψ (ψ)). هذه الصيغة تقول أننا إذا افترضنا "**~ س**"، فإننا حينئذٍ نستطيع أن نستدل على "**س**"، وإذا افترضنا "**س**"، حينئذٍ يمكننا أن نستدل على "**~ س**"، في الافتراضات العادية يمكن استنتاج صدق أوكذب "**س**" من خلال خاصية التسلسل، وقد اشترط لها دالة القضية "λ ψ . ~ ψ (ψ)"، لكنه لم يشترط أن تكون قيمة المتغير المستقل لدالة القضية "λ ψ . ~ ψ (ψ)" صادقة أو كاذبة(٢).

ولتجنب المفارقات المألوفة اقترح **تشيرش** أن يتم ذلك من خلال التقييد الواضح لقانون الوسط الممتنع بدلاً من الاعتماد على منهج **رسل** أو منهج **زرملو** E. Zermelo(١٨٧١-١٩٥٣)، فقد رأى أن كلا المنهجين يبدو اصطناعياً إلى حدٍ بعيد. ويتألف هذا التقييد من التخلي عن الصفة المفتوحة لدالة القضية "**د**"، أو بعض قيم "**س**" للمتغير المسقل Independent، الذي يصور إما قضية صادقة أو كاذبة ـ للتعبير عن القيمة **س** للمتغير المستقل نفترض أن **د(س)** غير معروفة ولا تصور شيئاً، ونستخدم نسقاً من الرموز المنطقية قادرة على التعامل مع دالات القضايا التي مداها في التعريف محدوداً(٣).

تعدى علاج **تشيرش** للمفارقات مفارقة **رسل** فبلغ مفارقة **إيبمند** Epimenides الكريتي* "مفارقة الكذاب الكريتي"، ومفارقة الأعداد الترتيبية غير المعرفة، التي تضم كلمات غير معرفة في شكل رموز غير معرفة لنسقنا.

ومفارقة **بورالي فورتي** Burali-Fori(٤). التي تنص على أن فئة جميع الأعداد الترتيبية، التي يكون كلٌ منها نوعاً ترتيبياً order type لفئة مرتبة كلية well-ordered set، تكون فئة مرتبة كلية. وذلك لأن النوع الترتيبي ص لهذه الفئة المرتبة كلية يكون العدد الترتيبي الأكبر، وهذا مستحيل، لأن النوع الترتيبي ص+١ للفئة المرتبة

(١)ويلارد فان؛ كواين: **بسيط المنطق الحديث**، نقل د: أبو يعرب المرزوقي، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، لبنان، ط١، ١٩٩٦، ص٢٠١.

(2)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic,** p.347.

(3)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic ,** PP.346-347.

* ترجع هذه المفارقة إلى **إيبمند** الكريتي الذي قال "كل الكريتيين يكذبون"، وتقع المغالطة إذا كان صادقاً باعتباره كريتي فهو كاذب، وإن كان كاذباً فالكريتيون حينئذٍ لا يكذبون وهو كريتي، إذن فهو صادق.

(4)**Ibid**,p348.

كلية والتي نحصل عليها بتقديم عنصر جديد وحيد ليلي كل عنصر من عناصر هذه الفئة يكون عدداً ترتيبياً أكبر[١].

على الرغم من أن هذه المفارقة لا ترتب للإجابة عن السؤال عما إذا كانت المفارقة نتيجة لمصادراتنا بهذه السهولة، أو عن مدى تعديلها الذي يخول لنا أن نتجنبها، من المحتمل أنها يجب أن تكون مفتوحة إلى مابعد نظرية الأعداد الترتيبية التي تنتج عن المصادرات التي تم تطويرها.

وسواء كان نسق المنطق الناتج عن مصادراتنا كافٍ لتطوير الرياضيات، إو إذا كان هذا النسق خالياً من المتناقضات، فإن الإجابة عن هذا السؤال لايمكن أن تتم إلا من خلال الحدس الحَذِر Conjecture. لكن الهدف الأساسي يتمثل في الحصول على إجابة تجريبية Empirical على هذه الأسئلة من خلال القيام بالاشتقاق Derivation بشيءٍ من التفصيل لسلاسل المصادرات، وأن يتحول النسق لتعويض لحالات الكفاية وحرية المتناقضات[٢]. وبحكم أن الدالة لا تكون حتمية إذا لم تكن قيمها محددة بوضوح، فإن التقييد يجعل الفعل في زمن المضارع يطبق فقط على الثابت قبل الكلام، وليس وقت الكلام، وهو ما نراه في مفارقة الكاذب، والمثال النموذجي للمفارقات هو "هذه القضية كاذبة" والتي إذا كانت كاذبة يمكن إثبات صدقها، وإن كانت صادقة فإنه يمكن إثبات كذبها. إذا أعدنا تقديم "هذه القضية" من خلال ق و"كاذبة" من خلال ك، سوف نكتبها بالشكل:

(ق>ك) < (ق < ك)′ و (ق < ك)′ < (ق < ك).

أحد هذه التعبيرات ليس مفارقة، ذلك لأن القضية تشتمل على نقيضها تعني فقط أنها كاذبة؛ لكن نقيضها يشتمل أيضاً على قضية نتيجتها كارثية[٣].

وإذا كان **رسل** قد قدم نظرية الأنماط كحل للمفارقات كما ذكرت. فإن **تشيرش** لم يكتفِ بالتقييد الذي عرضت له، وإنما قدم كذلك إلى الأنماط* التي تكون عادةً موضوعات للطبيعة التركيبية، والتي تشير إلى حدود لامدا[٤]. فظهر ما يعرف بحساب "**تشيرش - كيوري**".

---

(١)**معجم الرياضيات**: ص ص١٨٨-١٨٩.

(2)Church .A : **A set of Postulates for The Foundation of Logic**,p.348.

(3)Edwin Guthrie: **Russell's Theory of Types**,The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods, Vol. 12, No. 14(Jul. 8, 1915), pp. 381-385, p.381.

* نظرية النمط عند **تشيرش**، عبارة عن لغةٍ منطقية صورية، تشمل منطق الدرجة الأولى، لكنها تكون أكثر تعبيرية عندما تأتي بالمعنى التطبيقي، انظر: Peter, Andrews: "**Church's Type Theory**", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (Spring 2014 Edition).

(4)Loczewski. P.George : **The Lambda Calculus** , A Brief Introduction, Stmv, S. Toeche - Mittlerverlag, Darmstadt, Germany,1989, p.1.

لاحظ رسل حقيقة أن هناك قضايا غير شرعية لا تؤدي إلى أي مفارقة، واستشهد ب"قانون الانقباض" أن جميع القضايا تكون صادقة أو كاذبة. هذه القضية أصبحت محظورة من خلال نظرية الأنماط، بما أنها تشير إلى "جميع القضايا" التي تشتمل على نفسها. وقد اقترح شيرمان A.T.Shearman في كتابه " نطاق المنطق الصوري The Scope Of Formal Logic" أن تحتاج نظرية الأنماط إلى تحديد، لكنه لم يقدم أي معيار يمكن أن نختاره لقضايا المفارقات لحذفها وتركها أقل ضرراً.

أي استدلال ل"كل القضايا" سوف يؤكد أنه بلامعنى. أكثر من ذلك، بما أن القضية عن "بعض القضايا" تكافيء سلب العبارة "كل القضايا" والتي تكون أيضاً بلا معنى. وأي عبارة عن "القضايا" تصبح مستحيلة. "توجد قضية" مكافئة ل"من الكذب أن كل القضايا ليست موجودة" فإذا كانت الأخيرة غير شرعية، تكون الأولى كذلك أيضاً. بالإضافة إلى أن العبارة "س يتضمن ص" تكون قضية، تكون قضية" الحدان المكتوبان "قضية" من نمطين مختلفين من كليات مختلفة، ومن الصعب أن نرى كيف أنهما يمكن أن يكون لهما أي معنىً مشترك، أو يمكن مقارنتهما. والأفضل أن نقدمهما من خلال كلمات مختلفة[1].

تقدم الصياغة الممتازة لنظرية النمط البسيط دالات بوصفها موضوعات أولية قدمها **تشيرش** عام ١٩٤٠، تستخدم المصطلح الرمزي لحساب لامدا λ، وأصبحت هذه الصياغة مهمة في علوم الحاسب للربط بين نظرية المقولة Category، ونظرية النمط التي سوف ينظر إليها كنوعٍ معين من الدالات (الدالات القضوية)، بالإضافة إلى مفهوم الدالة الذي اعتبر أكثر أولية من مفهوم المحمولات والعلاقات، ولم تعرف الدالة بأكثر من أنها نوع محدد من العلاقة وعرفت بعض الحجج المخالفة للتصوير الأولي للدالات في شكل أنماط استقرائية كالآتي:

١- هناك نمطان أساسيان أ(نمط الأفراد) و ق(نمط القضايا)

٢- إذا كان أ، ب نمطان، حينئذٍ أ← ب، نمط الدالات من أ إلى ب يكون نمطاً

يمكننا أن نصيغ الأنماط بهذه الطريقة:

أ←ق (نمط المحمولات)

(أ←ق) ← ق (نمط محمولات المحمولات)

أ ←أ (نمط دالات)

(أ ←أ) ←أ (نمط داليات)

تتناسب مع كتابة:

(1)Guthrie, Edwin:**Op.Cit**,PP.382-383.

أ١، ...، أ ن←ب

بالنسبة ل

أ١←(أ٢←...←(أ ن←ب١)

بالطريقة:

أ١، ...، أ ن←ق

التي تتطابق مع النمط (أ١،...، أ ن)

ويدرس منطق الدرجة الأولى الأنماط فقط من الشكل:

أ، ...، أ←أ (نمط رموز الدالة)، و

أ، ...، أ←ق (نمط المحمول، رموز العلاقة)

لاحظ أن

أ← ب ← جـ

تصور بالشكل:

أ← (ب ← جـ).

بالنسبة لحدود هذا المنطق لن تتبع حساب **تشيرش** بالكامل، وإنما مع بعض الاختلافات التي ترجع إلى **كيوري** الذي قدَّم أفكاراً مشابهة قبل ظهور بحث **تشيرش**، والذي قدِّم له بشيءٍ من التفصيل **"روب هيندلي** Rob.Hindely" (١٩٥٠ -) في نظرية النمط. ولكنه يستخدم حساب λ الذي يزودنا بمصطلح عام للدالات[1].

يشير الثابت Constant "←" إلى التضمن في الصيغة الحدسية Intuitionistic Formula، والتي تعني أي صيغة تبنى من خلال المتغيرات القضوية مع ثابت واحد، ويشير المصطلح الرمزي الحدسي "{ }" إلى الكذب، و تتوقف أماكن الدالة على كذب وثنائية التضمن "←". وهذا يعني أن البناء التركيبي نفسه الذي شيدناه من أجل تعريف مجموعة الأنماط طوال البحث لن يكون متميزاً بين الأنماط والصيغ الحدسية. والروابط الكلاسيكية "⊂، و~" تعرف من خلال ما يعنيه رمز الكذب { } والتضمن الحدسي "←" على النحو التالي:

---

(1)Coquand ,Thierry**: Type Theory**, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 1st Published, Wed Feb 8, 2006, Substantive Revision Wed, Jan 20, 2010, p.8.

~ أ يكون أ ←{ }

أ ⊂ ب تكون أ ← (~ ب ← { }).

ولنفترض أن أ١، ...، أ ن قائمة من الصيغ الحدسية (مهما كانت فارغة)و ب صيغة، فإن التعبير عن الصيغة أ١، ...، أب ⊣ ب بالنسبة ل ن≤ صفر يسمى تالٍ ويعبر عن مفهوم صدق "فرضيات المُعامل" بمعنى إذا كانت الصيغ "أ١، ...، أ ن" صادقة، حينئذٍ تكون ب صادقة[١].

ب- <u>حساب كيوري</u>

توصل **كيوري** في منطق التحليل إلى شكلٍ جديد من أشكال المنطق الرياضي يختلف عن الأنساق الصورية، و مع أن **كيوري** يعد صورياً، إلا أنه تبنى مثل **تشيرش** بعض الفروق الخاصة في تصوره الصوري. إذ أنه مع أن الرياضيات، بالنسبة له، تعد دراسة للأنساق الصورية إنما يتمثل في "كفايتها التجريبية وبساطتها"، ولهذا السبب يسمي صوريته "الصورية التجريبية Empirical Formalism". أما تصوره العام للمنطق فيعد أشمل وأكثر تعقيداً. حيث أنه يسلم أيضاً بوجود أنواع أخرى من المنطق، وليس فقط المنطق الرياضي كالمنطق الفلسفي. والمنطق بوصفه "نظريات" أو "أنساق"(المنطق الموجه الكلاسيكي، والمنطق الكانطي وغيرهما). كما يقول أيضاً إن هذه الأنواع المختلفة من المنطق مرتبطة بعلاقات مختلفة، وأن أي تمييز بينها يمكن أن يتم ولكن بشكلٍ عشوائي[٢]. وقد قدم **كيوري** مثالاً على ذلك بقوله أن ص نتيجةً لاستبدال س بواقعةٍ حرة Free Occurrence ل س في ص. أما المتغيرات المقيدة فتوجد متغيرة بصورةٍ أساسية، ويستكمل التطبيق المعتاد للحدود المتطابقة التي تختلف فقط في التغير الألفبائي للمتغيرات المقيدة. لكنه راعى أن النمط الكلي(**∀س: س**) بناءً على السور الكلي، فقدم إليه في الشكل الرمزي "ج س (λ س . ص)"، بهدف إدراكه كنسقٍ لنمطٍ معمم محدد بالمعني الذي يقصده[٣]. ومن بعده كان **تشيرش**.

لكن ما المقصود بحساب "**تشيرش- كيوري**"؟

<u>حساب "تشيرش- كيوري"</u>

([1])Zaionc, Marek: **Mechanical Procedure for Proof Construction Via Closed Terms Typed λ Calculus**, Department of Computer and Information Sciences, University of Alabama at Birmingham,University Station,Birmingham, U S A, September, 1987, P.174.

(٢)ديمتريو: **مرجع سابق**، ص١١٦.

([3])Seldin, P.Jonathan: **Coquand's Calculus of Constructions: A Mathematical Foundations for A Proof Development System,** Department of Mathematics, Concordia University, Montreal Quebec, Canda, Formal Aspects of Computting, 1992,pp.426-427.

حساب **"تشيرش – كيوري"** كما رآه **"دانا سكوت**Dana Scott"(١٩٣٢-) عبارة عن نسقٍ جبري من الإجراءات، يسمح بتطبيق موضوعٍ على آخر(في نمط ـ الطريقة الحرة) جنباً إلى جنبٍ مع مجموعةٍ من الصيغ المُعرفة ـ إما من خلال λ الغامضة (**تشيرش**)، أو من خلال استحضار التوفيقات الخاصة (**كيوري**)[1]. وملاحظة الحدود والأنماط وتحديداتها باعتبارها برامج ليس فقط بالأمر الممكن، بل يمكن النظر إلى النمط باعتباره قضية، وإلى الحد باعتباره برهاناً على هذه القضية، وهو ما يعرف بتفسير القضايا كأنماطٍ بشكلٍ مستقل[2]. إن ميزة أنساق النمط البحت تكمن في تنميط تجريدات λ من الشكل " λس: أ.م" ومع ذلك يظل تنميط حساب λ فقط ما يغطيه **تشيرش** على الرغم من أن هناك عدداً من القضويات Proposals تتبنى PTS* الذي قدمه **كيوري** لتنميط حساب λ، وهذه الميزة غير منمطة، أو حرة المجال،وتقدم أنساق النمط حرة المجال تبايناً لأنساق النمط المحض، وتصيغ مجالاً لأنساق النمط الحر التي تختلف عنPTs من خلال استخدام تجريدات λ غير النمطية[3].

لكن اقتراب **"كيوري** و**تشيرش"** من نمط حساب لامدا يتطابق مع نموذجين من نماذج البرمجة، أولهما:

أ- بالنمط الضمني Implicit Type، وهذا النموذج قدمه **"روبن ميلنر** Robin Milner"*(١٩٣٤-٢٠١٠) عام ١٩٨٤، ومن الممكن أن يكتب هذا النموذج بلا نمطٍ يشير إلى البرنامج على الإطلاق، في حالة أن يكون البرنامج صحيحاً[4].قدَّم **"روبن ميلنر"** هذا النموذج بعدما سمع بعمل **"دانا سكوت"** مع **"كريستوفر ستراتشي"**(١٩١٦-١٩٧٥) Christopher Strachey في أسس لغات البرمجة، وبالأخص عام ١٩٦٩، الذي

([1])Henk Barendregt: **Op.Cit**, p9.

([2])Scott. Dana: **Stochastic λ-Calculi:Anextendedabstract,** ACarnegieMellon University,United States1,University of California,Berkeley,United States,2014,P.2.

* PTS : معناها عملية تحويل الدالة التي تأخذ عدداً من الحجج إلى حجة واحدة فقط، وتعود على دالةٍ أخرى إن وجدت، process of transforming a function that takes multiple arguments into a function that takes just a single argument and returns another function if any.

([3])Gilles Barthe Peter Dybjer: **Applied Semantics**, International Summer School,Appsem 2000, Springer, Caminha, Portugal,September 9-15,2000, P.6.

***روبن ميلنر** Robin Milner:أحد أهم علماء الحاسب البريطانيين، ولد في ١٣يناير عام١٩٣٤بيبليمبتون بالقرب من بليموت في انجلترا لأسرةٍ عسكرية، تخرج في كلية إيتون عام ١٩٤٧، وعمل بعد ذلك فى سلاح الهندسة الملكي حتى بلغ رتبة ملازم ثان. ثم التحق بكلية الملوك، بكامبردج وتخرج عام ١٩٥٧. كان **ميلنر** أول معلم يعمل كمبرمج وقتئذٍ في فيرانتى قبل دخوله الأوساط الاكاديمية فى جامعة مدينة لندن الجامعية، ثم سوانسى، وجامعة ستانفورد، في عام ١٩٧٣عمل فى جامعة إدنبره، حيث قام بتأسيس مختبر أسس علوم الحاسب المحدودة. وعاد الى كامبريدج ليعمل في منصب رئيس مختبر الحاسوب عام ١٩٩٥، حصل على درجة الزمالة في البحوث المتقدمة SICSA عام ٢٠٠٧، ورئاسة الجلسة لعلم الحاسوب فى جامعة إدنبره. انظر:

. https://www.theguardian.com/technology/2010/apr/01/robin-milner-obituary

([4])Barendregt, Henk : **Op .Cit**, p. 2.

نتج عنه مقال **"دانا سكوت"** الشهير، الذي قدم فيه للاستخدام التصاعدي للدالات الجزئية المسلسلة، والتي قدم لها الحساب النمطي لامدا λ، والمنطق الذي من شأنه إثباتها بطريقةٍ فعالة(١).

وقد كان العمل في هذا المجال مجرد خطوة لحل مشكلات تصميم لغة ونسق نمطي يعرفها المبرمج بالدالات على حد وصف **"ريتشارد موريس** Richard Morris"، وتكون حدودها أنماطاً مختلفة لدعوات مختلفة للدالة، على الرغم من أنه لم يناقش سيمانطيقا الأنماط الصورية، أو يقدم نمطاً نسقياً للأشكال المتعددة PolymorPhism، إلا أنه يصف كيف أن النمط الصحيح المحدد يتمثل فيما يتعلق بالحد الذي قدمه حساب لامدا من خلال حل مجموعة من المعادلات الخطية المتزامنة set of simultaneous linear equations(٢).

ب- بالنمط الصريح Explicit ، وهوالنموذج الآخر من نماذج البرمجة، ويتطابق مع نسخة **"تشيرش"** عن نمط حساب لامدا، ومن ثم يكتب البرنامج بجانب نمطه(٣). وقد استخدم **"تشيرش"** نظرية النمط في صياغة منطق الحس Logic Of Sense، ومعنى الدلالة، وقد طبقه في عددٍ من الأبحاث من عام ١٩٧٣ حتى عام ١٩٩٣، غير أنه لم ينشر شيئاً أكثر من إشراك حساب ـ λ(٤). وقد كانت المشكلة بالنسبة له تتمثل في إيجاد منهج مؤثر من خلال أي تعبير بعينه في المصطلح الرمزي للنسق يمكن من خلاله تحديد إذا ما كان من الممكن إثباته داخل النسق أم لا، لذلك كان فهمه لمشكلة قرارات حساب الدالة المقيدة بمعنىً مختلف نوعاً ما(٥). ولهذا السبب يبدو حساب لامدا ـ λ غامضاً لأول وهلة؛ فقد جرت العادة باعتباره آداةً بحتة للتسمية، على الرغم من أنه امتدادٌ صريح للمصطلح الرمزي الرياضي العادي(٦).لذلك تتم ملاحظة حساب لامدا الكلاسيكي بطريقتين: أولاً باعتباره لغة برمجة، وهنا تتم معاملته كنسقٍ جبري صوري للتفكير حول الحساب، وهو ما قدمه **"تشيرش"** في دراسةٍ حول أسس الرياضيات، وفيه افترض أن هذا الحساب يزودنا بنموذجٍ كليٍ للحساب، وقد أوضحه فيما بعد **"آلان تورنج** Alan Turing*"(١٩١٢- ١٩٥٤). ثانياً: باعتباره نسقاً صورياً له بديهيات وقواعد استدلال، تساعد بنفسها في تحليل استخدام اللغة وأدوات المنطق الرياضي، وفيه يُلاحظ حساب لامدا باعتباره استنباطاً إرشادياً في هذا النسق

---

(1)**Ibid** , p34.
(2)Milner, Robin: **A Theory of Type Polymorphism In Programming**, Computer Science Department, University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland,Journal of Computer and System Science,17,348-375,1978,p.350.
(3)Plotkin, Gordon, Stirling .Colin & Tofte. Mads**: A Brief Scientific Biography of Robin Milner,** MIT Press Cambridge, MA, USA ,2000,p.2.
(4)Barendregt, Henk : **Op .Cit**, p.34.
(5)Seldin, P.Jonathan**: Op .Cit**, p.8.
(6)Church .A : **A Note on The Entscheidngs Problem**, The Journal of Symbolic Logic , Vol . 1 , NO . 1 . (Mar . 1936), p.41.

الصوري، وهو ما يقدم صيغةً مباشرةً للاستدلال الانتصافي** Equational Reasoning الذي يتطابق مع التقييم الرمزي للبرامج بواسطة سلسلة جبرية مُبسطة تُسمى الاختزال[٦، ٧، ٨، ٩، ١٠][١]. وتندرج النزعة الاختزالية تحت النزعة اللوجستيقية، ومتبنوا هذه النزعة يبحثون عن البنيات المنطقية، أو عن المنطق(أياً كان صورياً، أو رياضياً) في كل شيءٍ، ويفترضون أن كل شيءٍ له تنظيمٌ منطقي، ويميز أصحاب النزعة الاختزالية بين صنفين من أقوال وظواهر اللغات الطبيعية:-

١- الأقوال أو الظواهر اللغوية المركزية الأساسية التي تستجيب لضرورات ومقتضيات الفكر المنطقي، ٢ - الأقوال أو الظواهر اللغوية الهامشية أوالثانوية التي تعتبر لا منطقية، أما أصحاب النزعة اللوجستيقية فتتعارض نظرتهم مع أصحاب الموقف الاختزالي، ممثلةٌ في ملاحظة الظواهر اللغوية، ثم البحث انطلاقاً من هذه الملاحظات عن وصفٍ رياضيٍ أو منطقي يكون أكثر كفايةً وملائمةً[٢].

ومن خلال لغات البرمجة، والأنساق الصورية توجد نسخٌ متعددة لأنماط حساب لامدا، خاصةً عندما تقوم الحدود بتشكيل نمطٍ من الشكل العادي[٣]. ويتألف حساب لامدا - λ كما قدمه **"تشيرش"** كلغة برمجة كلية مصغرة للعالم، من قاعدة تحويلٍ فردية (إبدال المتغير)، وصيغة تعريف لدالةٍ فردية، كطريقةٍ لصياغة تصور الحاسوبية الفعالة Effective Computability، وحساب - λ كلي، بمعنى أن الدالة التي يمكن حسابها، يمكن التعبير عنها وتقييمها باستخدام هذا المعنى الصوري، وهو مكافيءٌ لما قدمه **تورنج** على الرغم من أن حساب - λ يؤكد استخدام قواعد التحويل، ولا يعتني بشأن تحقيق الآلات في الواقع، فهو منهج يتعلق بصورةٍ أكثر بالعقل الإلكتروني Software أكثر من علاقته بالآلة* نفسها[٤]. وتعد تجربة **"تورنج"** كلاسيكية، تقترح لتحديد ما إذا

***آلان ماثيسون تورنج** :ولد في٢٣ يولية، ١٩١٢، في بريطانيا، كان الطفل الثاني والأخير بعد أخيه جون، كان من أشهر علماء الرياضيات، والمنطق، وعلوم الحاسوب النظرية، قدم مايعرف بآلات **تورنج**، والتي يمكن أن تُعتبر نموذجًا لحاسوب لأغراضٍ عامة، توفي عام ١٩٥٤.

****الاستدل الانتصافي** Equational Reasoning :هو منهجٌ يؤثر في البنى أو يتلاعب بها، مثل الصيغ والتعبيرات، وتقوم فكرته الأساسية على أن المساوي يمكن استبداله بالمساوي في أي مكان من السياق أو في أي سياق، وهو مصطلح أساسي في الرياضيات، المنطق، وعددٍ من تطبيقات المناهج الصورية في علم الحاسب،انظر:

Bachmair. Leo, Ganzinger . Harlad: **Equational Reasoning in Saturation-Based Theorem Proving**, February19, 1998, p.4.

(1)Tonder, Van Andre '**: A Lambda Calculus for Quantum Computation**, Department of Physics, Brown University, July 15, 2003, Revised Version : March 24 , 2004 , p. 3.

(٢)محمد أبوالعلا : **الحساب المنطقي عند كواين**، رسالة ماجيستير غير منشورة، إشراف د: سهام النويهي، كلية الآداب جامعة طنطا،٢٠١٢، ص٨٤.

(3)Barendregt , Henk : **Op .Cit**, p.34.

(4)Rojas, Raul : **A Tutorial Introduction To The Lambda Calculus** ,FU Berlin , WS-97/98 , P. 1.

كانت الآلة لها ذكاء على مستوى الإنسان تعرف باسم **"اختبار تورنج"** والاختبار عبارة عن لعبة تقليد imitation تحاول الإجابة عن السؤال "هل يمكن للآلة* أن تفكر؟!"[١].

تتعلق إمكانية حساب **"تورنج"** بصياغة القواعد الأساسية الدقيقة لمناقشة الرياضة بشكلٍ فعال، وتتألف آلات **"تورنج"** من تجمعٍ من الآلات، بها قراءةٌ علوية، شريط لامتناهٍ في كلا الاتجاهين ينقسم إلى مربعاتٍ تسمى حقول، وتكتمل الآلة خطوةً بعد خطوة، وفي كل خطوةٍ بعينها تأخذ حركةً تعتمد على ماتجده الحالة في الحقل الذي تقرأه علوياً، وفيها يسمح فقط برمزين هما "الصفر والواحد" ليحددان معاً حقلاً بعينه، والجميع عدا بعض الحقول المتناهية تكون قيمتها صفر، وهذه هي الحركات التي يمكن أن تتخذها الآلة:

(١) نكتب صفراً في حقلٍ بعينه (أولاً محو الموجود).

(٢) نكتب ١ في حقلٍ آخر (محو الموجود أولاً).

(٣) نحرك الشريط مربعاً واحداً لليمين.

(٤) نحرك الشريط مربعاً واحداً لليسار.

(٥) نتوقف[٢].

ومن خلال لغة البرمجة نتوقع أن تصبح الآلة قادرةً على القيام بإجراء تحسيب للحسابات، ويمكن تقديم الأعداد من خلال حساب لامدا بدءًا من الصفر، ثم نكتب ما يليه لتقديم العدد"١"، ثم نكتب يلي يلي صفر بالنسبة للعدد"٢"، وهكذا، وفي حساب لامدا فقط يمكننا أن نعرف دالاتٍ جديدة؛ فالأعداد سوف تُعرَّف باعتبارها دالاتٍ تستخدم المنهج التالي: الصفر يمكن أن يعرف بالصورة "λ ي**. (**λ ف . ف**)"، تتكون هذه الدالة من حجتين"**ي، ف**"، وسوف نختصر كل هذه التعبيرات إلى أكثر من حجةٍ واحدةٍ، مثل: "**λ ي، ف. ف**"، ويُفهم من ذلك أن" **ش**" تمثل الحجة الأولى التي سوف تستبدل خلال التقييم، وأن"**ف**" هي الحجة الثانية، وقد استخدم هذا المصطلح الرمزي الأعداد الطبيعية الأولى والتي يمكن تعريفها على النحو التالي:

١ ≡ λ ي ف . ي (ف)

---

*__لغة الآلة__:هي اللغة الوحيدة التي يفهمها الحاسوب مباشرة دون وسيط، وتعليمات هذه اللغة هي مجموعة من الأرقام الثنائية إما (٠، ١) ظهرت هذه اللغة مع بداية ظهور الحاسوب وكان المبرمجون بلغة الآلة يحتاجون إلى معرفة مكونات الحاسوب وإمكانياته، مما أدى إلى صعوبة فهم تلك اللغة وخاصة أن لكل حاسوب لغة آلة خاصة به،انظر: د. غازي إبراهيم رحو: **مدخل إلى علم الحاسوب والبرمجة بلغة باسكال**، دار المناهج للنشر والتوزيع ، ط١، الأردن، ١٩٩٩، ص٢٤٧.

(١) الذكاء الاصطناعي والإنسان الآلي: الكمبيوتر في مجالات الحياة، الألف كتاب الثاني، الهيئة العامة لمكتبة الاسكندرية، عدد ٨٢، ص١٠٥.

(2)Donald Monk .J**: Mathematical Logic** , Springer-Verlag , New York, Heidelberg , Berlin, 1976, p.14 .

**"ي اختصارًا لكلمة يلي ، و "ف" اختصارًا لكلمة صفر.

٢ ≡ λ ي **ف** . ي (ي(**ف**))

٣ ≡ λ ي **ف** . ي (ي (ي (**ف**)))، وهكذا[١].

تعتبر بديهيات "**بيانو**Peano (١٨٥٨- ١٩٣٢)" أساساً لنظرية الأعداد الطبيعية. فقد تبين له كيف يمكن رد خصائص الأعداد منطقياً. فقام بتعريف المفهومات الأساسية ل "العدد"، "التالي Successor"، "الصفر"، واقترح أن يظهر في تعريفات مختارة بعناية لهذه المفهومات الأساسية عن طريق حدود للمفهومات المنطقية، ورأى أنه يمكن اشتقاق تلك البديهيات من مباديء المنطق وحدها[٢].

أما عن معنى حدود لامدا– λ؛ فيمكن القول أن الحد صيغةٌ طبيعية (إذا كان موجوداً)، وأن جميع الحدود دون الصيغ الطبيعية متطابقة، وهذا الدمج القضوي لمثل هذا التفسير الطبيعي والبسيط لحساب **λ** يعد بمثابة لغة برمجة، والمقصود بها الحدود الصحيحة، والتي قد تبدو غير متسقة[٣].

يمكن ملاحظة اللغة باعتبارها معادلات صادقة بعينها بين البرامج (= حدود للحساب) ويمكن لثوابت برنامج أن تكافيء ثوابت برنامج آخر، إذا كان من الممكن استبدالها في كل السياق دون إحداث تغير في النتيجة[٤].

ويمكن تعريف الثوابت المنطقية باستخدام تصوير قيم الصدق في حساب لامدا على النحو التالي:

يمكن تعريف دالة العطف ذات الحجتين بالصورة التالية:

Λ ≡ س . ص (λ ع ل . ل) ≡ λ س ص . س ص ك

ودالة الفصل ذات الحجتين يمكن تعريفها بالشكل التالي:

v ≡ λ س ص . س (λ ع ل . ل) ص ≡ λ س ص . س (صادقة) ص

وسلب حجة واحدة يمكن تعريفه بالشكل التالي:

¬ ≡ λ س . س (λ ع ل . ل) (λ أ ب . أ) ≡ λ س س (كاذبة) ص[٥].

---

(1)Ibid , p.4.

(2)Linsky, Bernard: **Op.Cit**.

(3)Abramsky, Samson **: Full Abstraction in The Lazy Lambda Calculus** , Department of Computing , Imperical College of Science Technology And Medicin , Copyright , 1993 by Academic press Inc , Information And Computation , 105 ,159 -276 , 1993, p.161.

(4)Plotkin .G.D: **Call-By-Name, Call-By-Value And The λ Calculus**, Department of Machine Imlligence, School of Artificial Intelligmce, University of Edinburgh, United Kingdom, Theoretical Computer Science , 1(1975) 125-159, North- Holland Publishing Company, Received 1 August 1974,pp.124-125.

(5)Church .A : **An Unsolvable Problem Of Elementary Number Theory** , p355.

ويرى **تشيرش** أن كل دالةٍ تكراريةٍ للأعداد الصحيحة الموجبة تكون λ يمكن تعريفها، وكل λ يمكنها تعريف دالة من الأعداد الصحيحة الموجبة تكون تكرارية(١).أما المصطلح الرمزي المستخدم لتحديد تحويل Conversion تعبيرات لامدا فيرتبط باستبدالاتها، والمصطلح الرمزي يستخدم لتحديد إبدالاتٍ محددة:

م [س ← ن] س في **م** تستبدل بـ **ن.**

م [س → ن] ن في **م** تستبدل بـ **س.**

م [س ↔ ن] س في **م** تستبدل بـ **ن**، أو **ن** في **م** تستبدل بـ **س**، أي أن الاعتماد يكون على اتجاه التحويل(٢).

ومجموعة حدود "**λ**" (المصطلح الرمزي Λ) يتم بنائها من خلال سلسلة لا نهائية من المتغيرات V = { V، V´، V´´، .... } تستخدم التطبيق ودالة السلب على النحو التالي: **س** ∈ V ⇐ **س** ∈ Λ،

م، ن ∈ Λ ⇐ (**م ن**) ∈ Λ، **م** ∈ Λ، **س** ∈ V ⇐ (**λ س م**) ∈ Λ.

وبملاحظة الحد **"λ"**، نجد أن "**λ س ص . س ص ع**" تكون فيها "**س، ص**" متغيراتٍ مقيدة، و"**ع**" متغيراً حراً، والحد"**λ س ص . س س ص**" حداً مغلقاً(٣). تكون"**س**" مقيدةً إذا سبقها **λ**، أما الاسم الذي لا يسبقه "**λ**" فيسمى متغيراً حراً؛ ففي التعبير(**λ س . س ص**) يكون المتغير"**س**" مقيداً، بينما يكون المتغير"**ص**" حراً(٤).

وعلى الرغم من تخلي "**تشيرش**" عن نمطٍ أساسي ـ للمنطق الحر في حساب λ، إلا أنه استخدم حساب "**λ**" كأساسٍ لنسق نظرية النمط البسيطة، بينما أشار للأنماط الذرية Atomic Types للقضايا بالصفر، ورمز بـ"**ف**" للأفراد، كما رأى أن الحدود الذرية تشمل حدود الثوابت المنطقية المتعددة: "السلب، الوصل، السور الكلي لكل نمطٍ، بالإضافة إلى ثابت الأوصاف المحددة Definite:

ف أ (صفر أ) من النمط (أ ← صفر) ← أ لكل نمط(٥). وقد رأى "**تشيرش**" أن الترتيب الأصلي لـ"**أ، ب، جـ**، ....، إلخ" للمتغيرات يسمى ترتيباً طبيعياً، وتكون الصيغة شكلاً طبيعياً إذا كانت من شكلٍ طبيعي،لا يظهر بداخلها متغيراً يكون مقيداً وحراً في الوقت نفسه، ويعقبها الرمز λ، عندما نأخذها في الترتيب، في حين تظهر في الصيغة في ترتيبٍ طبيعي دون تكرارات تبدأ من "**أ**"، وتحذف المتغيرات التي تظهر فقط كمتغيراتٍ حرة، وتكون الصيغة "**ب**" صيغة طبيعية بالنسبة لـ "**أ**" من حيث المبدأ، وسيتم تحويل"**أ**" من خلال "**ب**".

---

(1)Loczewski George . P**: Op .Cit** , p. 3.
(2)Barendregt ,Henk: **Op .Cit**, p.9.
(3)Rojas, Raul: **Op . Cit**, p.2.
(4)Loczewski George . P**: Op .Cit**, p.4.
(5)Seldin, P.Jonathan**: Op .Cit**, p.8.

ومن خلال المبرهنات الثلاث القادمة يمكننا أن نسمي الدالة دالة الأعداد الصحيحة الموجبة، إذا كان مدى Range كل متغير مستقل يمثل فئةً من الأعداد الصحيحة الموجبة، ومدى المتغير التابع Dependent متصلاً بفئة الأعداد الصحيحة الموجبة، المبرهنة الأولى: إذا كانت الصيغة شكلاً طبيعياً وليس لها اختزال تكون ممكنة.
المبرهنة الثانية: إذا كان للصيغة شكلاً طبيعياً؛ فإن هذا الشكل الطبيعي يكون فريداً من نوعه في تطبيقات الثابت الأول، وأي سلسلةٍ Sequence لاختزالات الصيغة(إذا كانت متصلة) يجب إنهائها بشكلٍ طبيعي.
المبرهنة الثالثة: إذا كان للصيغة شكلاً طبيعياً؛ فإن كل جزءٍ مصاغ جيداً من هذه الصيغة يكون شكلاً طبيعياً .

عندما نطالب بالإشارة إلى عدد المتغيرات المستقلة؛ فإننا نتحدث عن دالة عددٍ صحيحٍ موجب، ودالة عددان صحيحان موجبان، وهكذا؛ ومن ثم إذا كانت**"د"** دالة الأعداد الصحيحة الموجبة **"ن"**، وكانت "أ١، أ٢، ....، **أ ن**" أعداداً صحيحة موجبة؛ حينئذٍ يجب أن تكون **د** (أ١، أ٢، .....، **أ ن)** أعداداً صحيحة موجبة[1]. وقد كان برهان الاتساق أول نتيجة لتبرير حساب – λ الخالص، وقد نشره **تشيرش** عام ١٩٣٥، وكانت هذه النتيجة مبنيةً على نطاق الحساب الخالص لـ λ الذي يتضمن بديهية٢(تؤخذ هنا كقيمة صدق لـ"الصدق")، والثابت الجديد **δ** مع البديهيات للتأكديد أن **δ م ن** = ٢ إذا كانت **م** و **ن** شكلاً عادياً، يختلفان فقط من خلال تعبيرات المتغيرات المقيدة، و **δ م ن** = ١

(تؤخذ هنا كقيمة صدق لـ"الكذب") إذا كانت **م** و **ن** تمثلان شكلاً عادياً، وليسا متشابهين ماعدا في بعض اختلافات المتغيرات المقيدة، وكان هدف **"تشيرش"** دمج المنطق باستخدام٢، و١ كقيم صدق، ولذلك قام بتعريف الروابط المنطقية كالسلب والوصل كدالاتٍ من الأعداد الطبيعية، وقام بتعريف الأسوار بالطريقة نفسها، عندما تكون صيغة السور صادقة تتحول إلى٢، أما خلاف ذلك فلا يكون لها شكلاً عددياً[٢].

يجب التأكيد أنه في حساب – λ تكون نوع القيمة ممثلةً في الدالة، وأن قيم الأنواع الأخرى(التي تشمل القيم المنطقية، الأعداد الصحيحة، والأزواج) يمكن تعريفها من خلال حدود الدالات. وبناء جمل حساب **-** λ يقدم منهجاً بسيطاً منتظماً لتدوين دالات التطبيق، كما يقدم أيضاً لمدخلات Inputs ومخرجات Outputs الدالات الأخرى، وتحديد مثل هذه الدالات في حساب **-** λ يتركز في قاعدة الذهاب من الحجة إلى النتيجة، ويتجاهل قضايا تعريف الدالة ومجالها ومداها، فعلى سبيل المثال: بينما يحدد عالم الرياضيات دالة الهوية ببعض مجموعة **"أ"** مثل:
د {أ ← أ

([1])Church .A: **An Unsolvable Problem Of Elementary Number Theory**, p.348.
([2]) Seldin, .P. Jonathan**: Op .Cit**, p. 6.

{**س ← س**

فإنه في بناء جملة حساب-**λ** نكتب (**λ س . س**)، وتنص القراءة غير الرسمية للتعبير (**λ س . س**) على أنه "إذا كانت الحجة تُسمى"**س**"، حينئذٍ يكون مخرج الدالة "**س**" بمعنىً آخر: مخرجات الدالة تمثل معطيات Datum تستند إلى مدخلاتها[١].

وأسماء الحجج في تعريفات الدالة لا تحمل أي معنىً في أنفسها، هي فقط "أشياءٌ مكانية" تستخدم في الإشارة إلى كيفية إعادة ترتيب حجج الدالة عندما تكون مُعرفة، غير أن (**λ ز . ز**) ≡ (**λ ص . ص**) ≡ (**λ ت . ت**) ≡(**λ و . و**)، وهكذا دواليك، نستخدم الرمز "≡" للإشارة إلى ذلك عندما تكون أ ≡ **ب**، وتكون "**أ**" مرادفاً فقط لـ "**ب**"[٢].

ولكي نفترض مسبقاً معرفةً لمعنى هذه الرموز نفترض أننا نعرف معنى رموز الكلمات والصيغة (عن طريق الصيغة والتي تعني فيها الكلمة مجموعة من الرموز مرتبة في صورة سلسلة متوالية، في صورةٍ مرتبة رمزاً يلي الآخر)[٣].

ويمكن تعريف الدالة "**د**" لعددٍ صحيح موجب بـ **λ**، إذا كان من الممكن إيجاد صيغة، مثل" **د** "، إذا كانت **د(م)** = **ر، م**، وكانت **ر** صيغاً للأعداد الصحيحة الموجبة **م، د، ر**، حينئذٍ تنعكس{**د**}(**م**) من **ر**، وبالمثل تكون الدالة "**د**" مثل ذلك عندما تكون **د** (**م، ن**) =**ر**؛ فإن الصيغة{**د**} (**م، ن**) تتحول إلى **ر** (**م، ن، ر**) تكون أعداداً صحيحة موجبة، و تكون **م، ن، ر** صيغاً متطابقة، وهكذا بالنسبة للدالات ذات الأعداد الصحيحة الموجبة. ويتضح من ذلك أن حالة أي دالة **λ** يمكن تعريفها للأعداد الصحيحة الموجبة، وأن عملية اختزال الصيغ لصيغةٍ طبيعية توفر لوغاريتماً بالنسبة للحساب المؤثر للصيغ الخاصة للدالة[٤].

<u>تحويل ألفا Alpha:</u> تحويل الصيغ يتم فقط للثوابت التي يمكن حسابها بشكلٍ فعال(على سبيل المثال مجموعة المتغيرات الحرة التي تكون متضمنة في صيغةٍ ما)، ويرى "**تشيرش**" أنه لا توجد مجموعة كاملة من ثوابت التحويل يمكن حسابها بشكلٍ فعال، إلا أنها تعمل على حل مشكلات العدد الأولي[٥].

بالنسبة لـ "**λ س . س ص**" تكون ص متغيراً حراً، بينما "**س**" متغيراً مقيداً، المتغيرات الحرة تأخذ قيمها من تعبيرات لامدا في المستويات الأعلى، ومن ذلك قواعد تحويل ألفا (أ) التالية:

(1)Mathias Fellesien , Mathew Flatt : **Programming Language And Lambda Calculi** , (Utah CS7520 Version) Draft : March 8 , 2006 , Copyright , 1989 , 2003 Felleisen , Flatt , p 25.
(2)Rojas, Raul : **Op . Cit** , p.2.
(3)Church .A : **A set Of Postulates For The Foundation Of Logic,** p.350.
(4)**Ibid** , p. 349.
(5)Church .A : **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** , p. 358.

١- λ س . م ←أ λ س صفر . م [س ← س صفر]

٢- λ س . م →أ λ س صفر . م [س → س صفر]

٣ - λ س . م ↔أ λ س صفر . م [س ↔ س صفر].

عندما لا تكون **س** صفر متغيراً حراً في **م**، وعملية تحويل ألفا ربما لا تحول قيمة التعبير، والقاعدة الثالثة التي يستند إليها تحويل ألفا هي مجرد تركيب من القاعدتين الأولى والثانية، وتحويل ألفا ربما يكون مطلوباً إذا كانت الاستبدالات مؤداةً في تعبيرات لامدا[١].

والتحويل السابق من ضمن الإعدادات الإضافية التي نحصل عليها بإضافة الثوابت، والذي يغطي الاختزال، النظريات، النماذج، والتحويل، وهنا يكون معنى الحد ـ **λ** صيغة عادية، وجميع الحدود دون الصيغ العادية متطابقة، وهذا الدمج القضوي مثل التفسير البسيط والطبيعي لحساب ـ **λ** كلغة برمجة، فإذا تم عملها في البرمجة لم يكن هناك مجالٌ للشك في أنها صحيحة، على الرغم من أنها تثير مسألة لا تناسق النظرية[٢].

وإذا كانت **م**١، .....، **م ن** في السياق الرياضي محددة كما في التعريف أو البرهان؛ حينئذٍ كل المتغيرات الحرة في هذه الحدود يتم اختيارها لتختلف عن المتغيرات المقيدة[٣].

<u>تحويل بيتا Beta:</u> لغة بيتا **β** (**ب**) لغة تقييدية جداً للدرجة التي تجعلها دون فائدة حقيقية لأي مهمة برمجية حقيقية؛ بما أنها لا تمتلك أي قدرة تجريدية؛ بمعنى انه ليس لديها القدرة على تعريف دالات- ليست ذات بعدٍ قوي مثل لغة البرمجة الواقعية[٤].

تحويل بيتا (**ب**) يتألف من عملية استبدال المتغير المقيد في هيكل سلب لامدا بحجةٍ تمر من خلال الدالة عندما يتم تطبيقها، وتسمى هذه العملية باختزال **ب**.

العملية العكسية لتحويل **ب** تختزل تعبير لامدا تعود إلى إمكانية اختزال التعبير يكون اتجاهاً آخر لتحويل– **ب** ويسمى سلب– **ب**.

---

(1)Loczewski George . P**: Op .Cit** , p. 4.
(2)Samson Abramsky : **The Lazy Lambda Calculus** , p. 3.
(3)Barendregt , Henk : **Op .Cit** , p. 10.
(4)Loczewski George . P**: Op .Cit** , pp. 4-5.